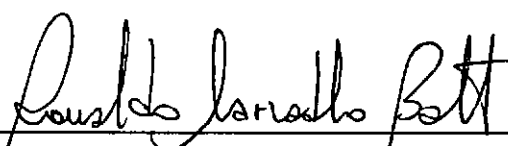


VIBRAÇÕES DE ESTRUTURAS APORTICADAS
ESPACIAIS ESTAIADAS

FRANCISCO DE ASSIS DAS NEVES

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:



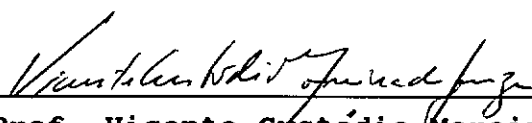
Prof. Ronaldo Carvalho Batista, Ph.D.
(PRESIDENTE)



Prof. Benjamin Ernani Diaz, Dr. Ing.



Prof. Paulo Chaves de Rezende Martins, Dr. Eng.



Prof. Vicente Custódio Moreira de Souza, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MAIO DE 1990

NEVES, FRANCISCO DE ASSIS DAS

Vibrações de Estruturas Aporticadas Espaciais
Estaiadas [Rio de Janeiro] 1990.

XV, 168p. 29.7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Civil, 1990).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro,
COPPE.

1. Análise Dinâmica
2. Estruturas Estaiadas
3. Pontes Estaiadas

I. COPPE/UFRJ

II. TÍTULO (série)

A meus pais Pedro e Zulmira:

exemplos de fé, humildade e luta.

À minha irmã Maria (in memorium)

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Ronaldo Carvalho Batista pela orientação dedicada, ensinamentos, incentivo e apoio sem os quais não teria logrado êxito neste trabalho.

À Michele pela contribuição dada e presteza com que me ajudou nos momentos difíceis.

Ao prof. Webe pela simplicidade e amizade; sem esquecer as caronas.

Ao prof. Caio Gomes pelo apoio fornecido nas épocas difíceis pelas quais passei no Recife.

A Toinho, meu irmão mais velho, que me serviu de referência para seguir a trilha do saber.

A todos meus irmãos pela confiança depositada em mim.

A Ivan, Paulo, Ricardo, Afonso e Jéferson, companheiros de república, e mais do que companheiros, amigos com os quais espero poder contar sempre. Com certeza essa fase de nossas vidas jamais será esquecida.

A Alberto pela amizade demonstrada e pela confiança transmitida.

A Célio, Sandro e Walnório, amigos mais íntimos, dos quais guardo boas lembranças.

A Mário e Sagrilo, colegas de turma, pelos quais tenho grande estima.

A Gray, Marcílio, Ademir, Maria Lúcia, Zé Antônio, Bogarin, Rafael Palmier e Rafa pela amizade e momentos de descontração proporcionados.

A Célio Nóia pela amizade e apoio na confecção deste trabalho.

"Intensifique sua caminhada em busca do sofrimento e se conscientize de que na dor reside a causa de suas satisfações. Você gera a sua interioridade na intimidade mais funda da dor. Alimente-se, pois, dos ecos subterrâneos dos seus ais misturados aos alaridos do prazer que você fabrica e sofre. Aproveite os devaneios e os instantes em que se atualiza o seu ser para transferir ao outro a crença que o possui. Contagie-o de sua fé na vida e na felicidade que se tece com fios de soluços. Faça-o crer que, na translucidez da lágrima que sulca o chão da nossa alma, está a espiritualização do humano viver. E, como só se vive no convívio, comungue".

Antônio Neto das Neves

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COOPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

VIBRAÇÕES DE ESTRUTURAS APORTICADAS
ESPACIAIS ESTAIADAS

Francisco de Assis das Neves

Maio de 1990

Orientador: Ronaldo Carvalho Batista

Programa: Engenharia Civil

Apresenta-se neste trabalho uma ferramenta numérica para análises estática não-linear geométrica e dinâmica linear. Os procedimentos numéricos e técnicas de modelagem são desenvolvidos para análises, num futuro próximo, de pontes estaiadas de grandes vãos. A aproximação desenvolvida faz uso de procedimentos bem estabelecidos do método dos elementos finitos.

Vários exemplos-teste mais um modelo tridimensional de ponte estaiada com três vãos são usados para demonstrar a potencialidade e a validade da aproximação adotada para análises de estruturas da prática.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL
FULFILLMENT OF THE REQUERIMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF
SCIENCE (M.Sc.).

Francisco de Assis das Neves

Maio, 1990

Thesis Supervisor: Ronaldo Carvalho Batista

Department: Civil Engineering

A numerical tool for geometric nonlinear static and linear dynamic analysis of stayed spatial frame structures is presented. The numerical procedures and modelling technics are developed towards near future analysis of long span stayed bridges. The developed approach mapes use of well established procedures of the finite element method.

Several test examples plus a 3-D model of a three spans multi-stayed bridge are used to demonstrate the potentiality and validity of the adopted approach to analyse practical structures.

ÍNDICE

	página
CAPÍTULO I - Introdução	1
I.1 - Objetivos e Motivação do Trabalho	1
I.2 - Escopo do Trabalho	2
CAPÍTULO II - O Problema de Vibrações sob Tensões Iniciais de Estruturas Aporticadas Espaciais Estaiadas	4
II.1 - Considerações Iniciais e Hipóteses Básicas para o Modelo Estrutural Adotado	4
II.2 - Modelagem Matemática	11
II.3 - Tipos de Análises Envolvidas	12
II.3.1 - Análise Linear Estática	12
II.3.2 - Análise Não-linear Estática	15
II.3.3 - Análise de Vibração Livre	20
II.4 - Análise de Vibração sob Tensões Iniciais: Formulação Matricial do Problema	24
II.5 - Carga Crítica com Critério de Freqüência Nula($\omega^2 = 0$)	37
CAPÍTULO III - Algoritmo Numérico para Solução do Problema	39
III.1 - Introdução	39

III.2 - Generalidades	40
III.2.1 - Processo Incremental	41
III.2.2 - Processo Iterativo	43
III.2.3 - Processo Incremental-iterativo	45
III.2.4 - Método Incremental-iterativo com Newton-Raphson	45
III.2.5 - Critérios de Convergência	51
III.3 - Solução do Problema com Não-linearidade Moderada	54
III.3.1 - Algoritmo 1: Força Inicial Equilibra- da no 1º. passo de carga	57
III.3.2 - Algoritmo 2: Força Inicial Incremen- tada	64
III.4 - Solução do Problema de Autovalor para Vi- brações sob Tensões Iniciais	68
III.5 - Determinação de cargas críticas com Crité- rio $\omega^2 = 0$ (Caso Particular)	71
 CAPÍTULO IV - O Programa Vibres	 74
IV.1 - Introdução	74
IV.2 - Descrição Geral da Estrutura do Programa ...	75
IV.3 - Implementações e Alterações Realizadas no Dinesp	86
IV.4 - Elementos Utilizados	87
IV.4.1 - Elemento de Pórtico Espacial	87
IV.4.2 - Elemento de Cabo/Treliça	89

CAPÍTULO V - Aplicações	99
V.1 - Introdução	99
V.2 - Exemplos-teste	100
V.2.1 - Pórtico Plano	100
V.2.2 - Cabo Reto Protendido	105
V.2.3 - Cabos Poligonais Protendidos	112
V.2.4 - Torre Estaiada	120
V.2.4.1 - Torre Estaiada com 2 Cabos	120
V.2.4.2 - Torre Estaiada com 1 Cabo	126
V.3 - Ponte Estaiada: Análise Bidimensional	130
V.4 - Ponte Estaiada: Análise Tridimensional	143
 CAPÍTULO VI - Comentários Finais, Conclusões e Sugestões	 153
VI.1 - Comentários Finais	153
VI.2 - Conclusões e Sugestões	155
 Referências Bibliográficas	 157
 Apêndice A - Matriz Elástica, Geométrica e de Transformação para o Elemento de Pórtico Espacial	 164
 Apêndice B - Matriz Elástica, Geométrica e de Transformação para o Elemento de Treliça Espacial	 167

SIMBOLOGIA

letras do alfabeto romano

A - área da seção transversal

\tilde{B} - matriz das funções de interpolação, obtidas através da derivação de \tilde{N} , matriz das funções de interpolação lineares

\bar{B} - matriz das funções de interpolação não-lineares

$\hat{B}(\underline{U}^e)$ - matriz das funções de interpolação dependente dos deslocamentos \underline{U}^e

\tilde{C} - matriz de amortecimento

dv - volume infinitesimal

E - módulo de elasticidade

$f(t)$ - vetor de cargas externas variável no tempo

\tilde{f}_s - vetor das forças de superfície

\tilde{f}_m - vetor das forças de massa

\tilde{F}_1 - vetor das forças concentradas

F_{AX}^i - esforço interno axial atual no elemento

\tilde{F}_{int} - vetor das forças internas resistentes nodais

\tilde{F}_{inic} - vetor das forças iniciais. Obtido partir das forças de protensão

\tilde{I} - matria identidade

\tilde{K} - matriz de rigidez genérica da estrutura

\tilde{K}_E - matriz de rigidez elástica da estrutura

\tilde{K}_G - matriz de rigidez geométrica

\tilde{K}_T - matriz de rigidez tangente

\bar{K}_G - matriz de rigidez geométrica reduzida, quando $\lambda = 1$

$\tilde{K}_T^{P.E}$ - matriz de rigidez tangente do elemento de pórtico espacial

- $\tilde{K}_T^{C.T}$ - matriz de rigidez tangente do elemento de cabo/treliça
- $\tilde{K}_E^{P.E}$ - matriz de rigidez elástica do elemento de pórtico espacial
- $\tilde{K}_E^{C.T}$ - matriz de rigidez elástica do elemento de cabo/treliça
- \tilde{K}_{ele}^i - matriz de rigidez tangente de cada elemento, atualizada, no sistema global
- \tilde{K}^0 - matriz de partida para o problema não-linear
- \tilde{L} - matriz triangular superior
- \tilde{L}^t - transposta de \tilde{L} . Matriz triangular inferior
- L_0 - comprimento inicial do elemento
- L_1 - comprimento atual do elemento
- \tilde{m} - matriz de massa do elemento
- \tilde{M} - matriz de massa para toda a estrutura
- $\tilde{M}^{P.E}, \tilde{M}^{C.T}$ - matrizes de massa para os elementos de pórtico espacial e cabo/treliça, respectivamente
- \tilde{N} - matriz das funções de interpolação
- P - carga atuante segundo uma dada direção
- p - carga distribuída
- \tilde{P}_{inc} - vetor incremental das cargas externas no processo não-linear
- \tilde{P}_{tot} - vetor das cargas externas total
- \tilde{R} - contém o efeito das forças atuando na estrutura
- \tilde{R}_{inc} - incremento do vetor das cargas externas quando se considera o vetor de forças iniciais (protensões)
- \tilde{T}_T - matriz de transformação (12x12)
- \tilde{T}_R - submatriz da matriz \tilde{T}_T . Matriz de ordem 3
- \tilde{U} - vetor de deslocamentos nodais

$\dot{\underline{U}}$ - vetor de velocidades nodais
 $\ddot{\underline{U}}$ - vetor de acelerações nodais
 \underline{u}^e - vetor de deslocamentos de um ponto do elemento "e"
 \underline{U}^e - vetor de deslocamentos nodais do elemento "e"
 V - volume de um corpo
 \underline{X} - vetor das coordenadas generalizadas

letras do alfabeto grego

α - parâmetro correspondente às frequências circulares ao quadrado
 δ - símbolo de incremento virtual de uma grandeza
 $\delta W_{int}, \delta W_{ext}$ - incremento do trabalho virtual interno e externo, respectivamente
 $\delta v, \delta H$ - deslocamento na direção vertical e horizontal, respectivamente
 Δf - incremento dos esforços internos extensionais
 $\Delta \underline{U}^i$ - vetor dos deslocamentos incrementais
 $\Delta \underline{U}_{ele}^i$ - deslocamentos nodais incrementais do elemento na iteração i
 $\Delta \underline{R}$ - vetor de desequilíbrio nodal
 $\underline{\varepsilon}_T$ - vetor das deformações totais
 $\underline{\sigma}_T$ - vetor das tensões totais
 $\underline{\varepsilon}_F$ - representa a parcela fundamental do vetor de deformações $\underline{\varepsilon}$
 $\underline{\sigma}_F$ - representa a parcela fundamental do vetor de tensões $\underline{\sigma}$
 $\underline{\varepsilon}_I, \underline{\sigma}_I$ - representam, respectivamente, as parcelas incrementais dos vetores $\underline{\varepsilon}$ e $\underline{\sigma}$
 $\underline{\varepsilon}_L$ - vetor de deformações lineares

ε_{NL} - vetor de deformações não-lineares

λ - parâmetro de carregamento

Φ - matriz modal, cujas colunas são os modos de vibração ordenados

ω - frequência natural circular de vibração

$\tilde{\Omega}$ - matriz espectral. Contém os autovalores ordenados

μ - massa específica

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 - OBJETIVOS E MOTIVAÇÃO DO TRABALHO

Sistemas estruturais estaiados estão presentes em muitas aplicações da engenharia como, por exemplo, nas coberturas de grandes vãos, torres de comunicação, torres de estruturas "offshore", pontes estaiadas, etc. Nesses sistemas estruturais, as estruturas reticuladas, de grande porte, são estaiadas por cabos que proporcionam rigidez ao conjunto. Em geral, esses sistemas são mais leves e, portanto, mais econômicos do que as estruturas reticuladas convencionais, em razão da alta eficiência dos cabos quando submetidos à tração.

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma ferramenta para análise de estruturas reticuladas, cuja discretização é feita por elementos finitos de pórtico espacial combinados com os de cabo/treliça. A análise é dirigida à investigação do comportamento estrutural não-linear geométrico e dinâmico linear, este último considerando o estado de tensões iniciais oriundo do carregamento estático. Investigam-se, assim, as vibrações da estrutura estaiada em torno da sua configuração deformada final de equilíbrio estático. A ferramenta numérica de análise aqui apresentada tem como objetivo futuro, a sua aplicação a pontes estaiadas. Esta aplicação permitirá um exame mais detalhado do comportamento estrutural dessas pontes ao longo das várias

etapas de construção.

I.2 - ESCOPO DO TRABALHO

No capítulo II é apresentada a formulação matricial adotada para análise de vibrações sob tensões iniciais de estruturas aporticadas espaciais estaiadas. Tecem-se ainda, nesse capítulo, considerações sobre as etapas intermediárias de análises envolvidas.

No capítulo III tem-se a maior contribuição deste trabalho, onde os algoritmos desenvolvidos para a obtenção da resposta não-linear geométrica de estruturas aporticadas estaiadas são apresentados. Uma descrição geral dos processos empregados na análise não-linear geométrica, juntamente com o método de Newton-Raphson é encontrado nesse capítulo. Além disso, apresenta-se um critério dinâmico para cálculo de carga crítica para estruturas aporticadas estaiadas, como um caso particular da formulação desenvolvida.

Com o programa Vibres, as frequências e modos de vibração são obtidos em torno de uma configuração deformada, resultante do equilíbrio estático não-linear. Isto é conseguido com o emprego dos algoritmos desenvolvidos no capítulo III. A estruturação geral desse programa, com suas principais características, mais os elementos implementados, são apresentados no capítulo IV.

O capítulo V é dedicado à verificação da modelagem e dos algoritmos desenvolvidos, através da análise de resultados. Vários exemplos-teste são analisados e uma ponte

estaiada no plano e outra no espaço constituem exemplos de aplicações práticas da engenharia.

No capítulo VI apresentam-se finalmente os comentários finais e algumas sugestões para trabalhos futuros.

Nos apêndices A e B encontram-se as matrizes elástica, geométrica e de transformação, respectivamente para os elementos espaciais de pórtico e de treliça.

CAPÍTULO II

O PROBLEMA DE VIBRAÇÕES SOB TENSÕES INICIAIS DE
ESTRUTURAS APORTICADAS ESPACIAIS ESTAIADASII.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS E HIPÓTESES BÁSICAS PARA O
MODELO ESTRUTURAL ADOTADO

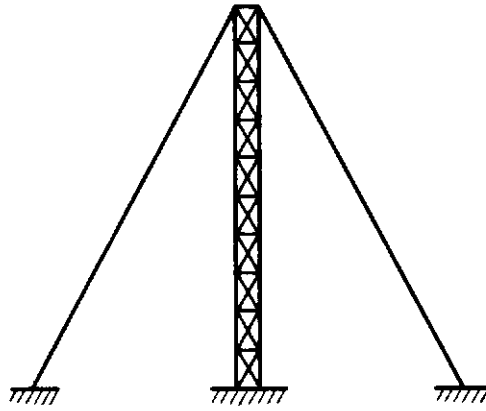
O modelo estrutural aqui apresentado é destinado à análise de estruturas que possam ser discretizadas, dentro de aproximações razoáveis, por elementos de pórtico espacial e elementos de cabo.

Da presença dos elementos de cabo, que proporcionam enrijecimento e/ou sustentação ao sistema estrutural, advém a designação de estruturas estaiadas, tendo como exemplo: torres estaiadas, pontes estaiadas, etc. Pode-se dizer, portanto, que nessas estruturas o sistema de cabos constitui um conjunto de componentes de importância fundamental, podendo-se afirmar que a rigidez global do sistema estrutural é comandada quase que diretamente pela rigidez do sistema de cabos.

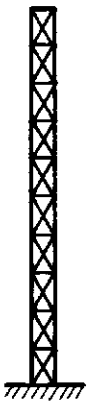
Considere a torre estaiada da figura II.1, decomposta em seus componentes estruturais.

Num projeto econômico de torres altas e esbeltas, o sistema de cabos terá grande influência, e devido à alta eficiência quando tracionados, os cabos-estais absorverão razoável parcela das cargas atuantes sobre a estrutura.

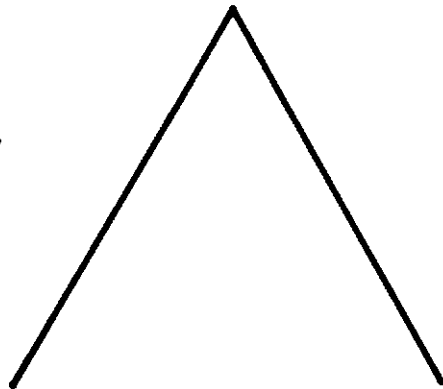
A figura II.2 mostra uma ponte estaiada com os seus componentes estruturais.



TORRE ESTAIADA

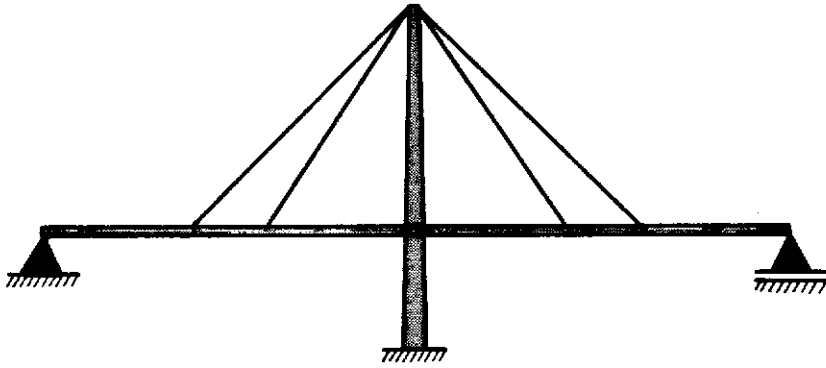
 $=$ 

TORRE

 $+$ 

CABOS

FIG. II.1 - TORRE ESTAIADA E COMPONENTES ESTRUTURAIS.



PONTE ESTAIADA

=

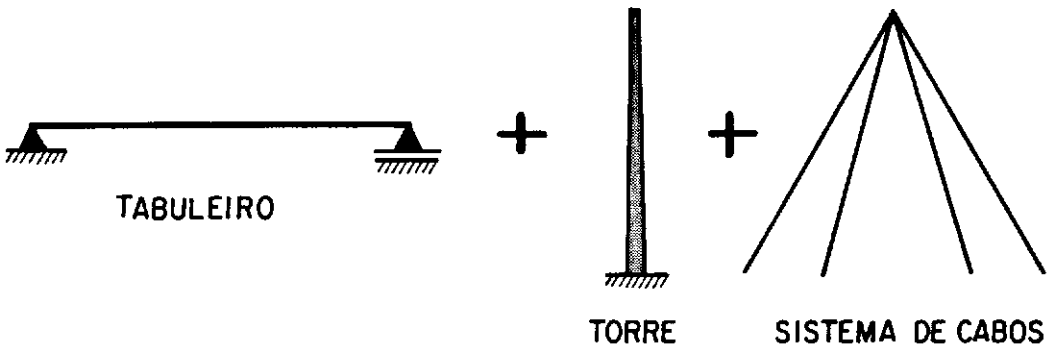


FIG. II.2 - PONTE ESTAIADA E COMPONENTES ESTRUTURAIS.

Neste tipo de sistema estrutural, os cabos são responsáveis pela transferência de cargas do tabuleiro para a torre, ou seja, o tabuleiro é suportado elasticamente pelos cabos. Aqui, também, se se deseja aumentar a rigidez da estrutura como um todo, deve-se aumentar a rigidez dos estais [1].

Nesse trabalho considera-se o problema de vibrações livres não-amortecidas de estruturas aporticadas espaciais com cabos, cujo comportamento estático envolve não-linearidade geométrica.

A consideração de não-linearidade geométrica para a estrutura de pórtico espacial se deve ao efeito da interação esforço normal x momento fletor nos elementos de viga-coluna do pórtico, quando os mesmos são submetidos simultaneamente à cargas transversais permanentes e de protensão do sistema de cabos.

A estrutura de pórtico espacial considerada tem por hipótese um comportamento estático caracterizado por não-linearidade geométrica moderada e linearidade física dos materiais que a compõem. As considerações sobre a importância desta não-linearidade serão examinadas na seção II.3.2.

Os cabos que constituem os estais são por hipótese prática bem estirados, isto é, sujeitos a protensões, resultando em configurações quase-retilíneas.

Em geral, o comportamento estrutural de cabos pode ser caracterizado por forte não-linearidade geométrica devido a grandes mudanças de configuração, a qual está diretamente relacionada com a magnitude do esforço de tração aplicado no

mesmo. Entretanto, quando sujeitos a forças de protensão elevadas, a não-linearidade dos estais é somente moderada.

Cada estai é aqui discretizado por elementos de cabo-treliça, ou seja, elementos de treliça espacial, com não-linearidade moderada, sob tensão (ou força) inicial. Assim, substitui-se uma catenária por uma série de elementos retilíneos [2].

A análise dinâmica dessas estruturas aporticadas espaciais, estaiadas por cabos pretensionados, requer a solução de um problema de vibração da estrutura como um todo, submetida a um estado de tensões internas iniciais, devido principalmente à protensão dos estais. Portanto, a análise de vibrações "livres" não-amortecidas dessas estruturas é feita sobre a sua configuração deformada de equilíbrio estático sob a ação de cargas externas e protensão nos cabos, obtida previamente através da análise estática não-linear geométrica.

Para melhor esclarecer o procedimento de análise adotado e o comportamento estático desses sistemas, utiliza-se um exemplo ilustrativo.

A figura II.3 apresenta uma torre, cujos cabos exibem grandes deflexões antes de serem aplicadas as protensões de projeto. Na configuração final, os cabos apresentam-se quase-retilíneos. A análise de vibrações sob tensões iniciais tem os seguintes passos:

(i) primeiro, procede-se a uma análise não-linear estática atingindo-se o ponto de equilíbrio "E", ilustrado na figura II.4.

(ii) depois, sobre a condição de equilíbrio final não-linear, representado pelo ponto "E", investiga-se o comportamento dinâmico (veja fig. II.5), isto é, frequências e modos naturais de vibração.

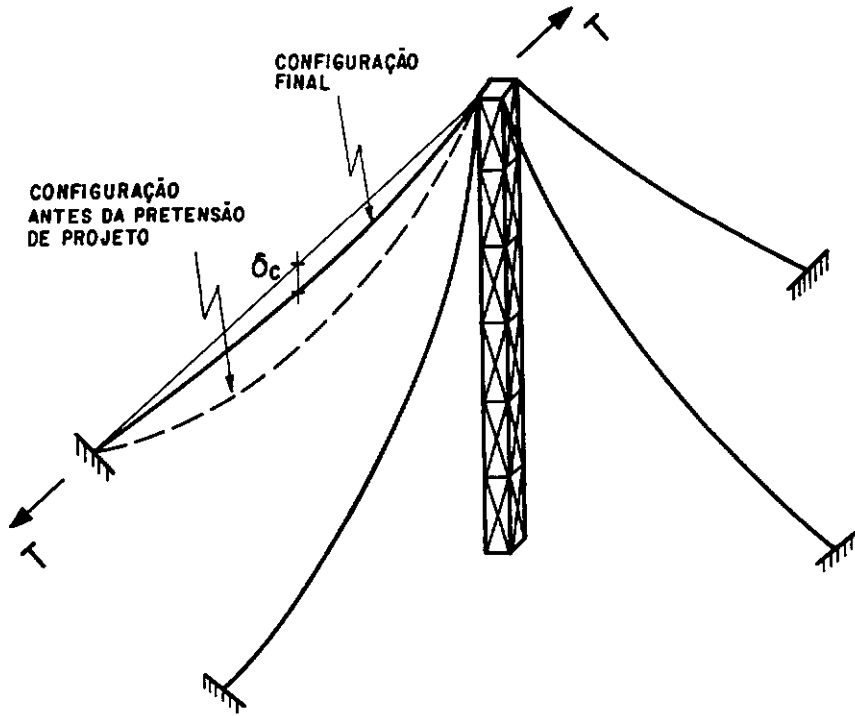


FIG. II.3 - CONFIGURAÇÃO DOS ESTAIS ANTES E DEPOIS DA PRETENSÃO.

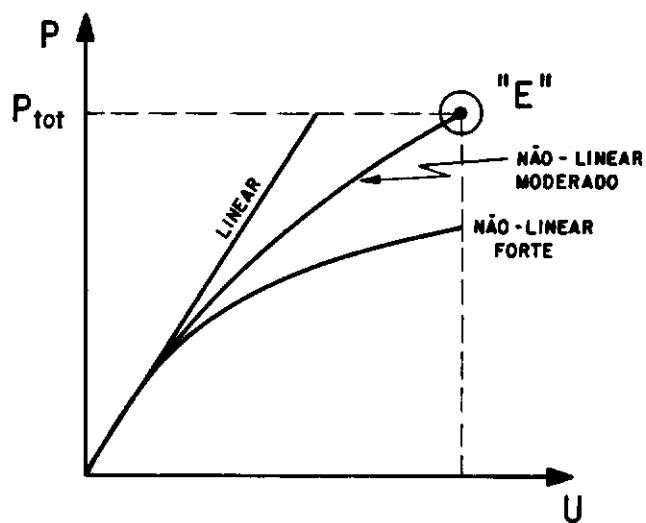


FIG. II.4 - COMPORTAMENTOS NÃO-LINEARES.

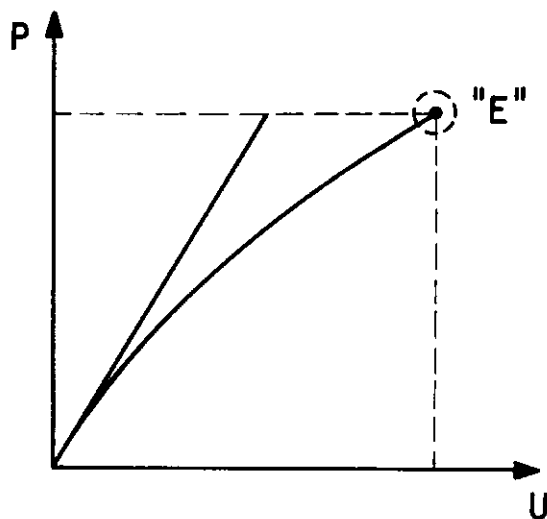


FIG. II.5 - VIBRAÇÕES EM TORNO DO ESTADO DE EQUILIBRIO.

II.2 - MODELAGEM MATEMÁTICA

O desenvolvimento das equações que representam o comportamento de um dado sistema estrutural é subordinado à aplicação de determinadas regras básicas. A primeira regra diz respeito às hipóteses simplificadoras que surgem quando da redução do sistema real para o sistema analítico. Estas hipóteses são fundamentais numa modelagem matemática e devem ser enunciadas de maneira clara e precisa, já que limitarão o emprego da formulação desenvolvida e definirão o campo de aplicação prática. A segunda regra diz respeito à modelagem numérica e aos algoritmos de solução das equações que representam o modelo analítico adotado. Esses algoritmos devem ser escolhidos de forma adequada às análises estática e/ou dinâmica pretendidas.

No presente trabalho, o método dos elementos finitos é utilizado para a discretização da estrutura com elementos retilíneos e as equações de movimento resultantes podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\tilde{M} \ddot{\tilde{U}} + (\tilde{K}_E + \tilde{K}_G) \tilde{U} = \tilde{Q} \quad (\text{II.1})$$

A linearização desta equação, para o caso de vibrações sob tensões iniciais, leva ao seguinte problema de autovalor

$$[(\tilde{K}_E + \tilde{K}_G) - \omega^2 \tilde{M}] \tilde{\Phi} = \tilde{0} \quad (\text{II.2})$$

cujas soluções não triviais fornecem as frequências circulares e os modos de vibração em torno da configuração deformada de

equilíbrio não-linear.

As fases intermediárias de desenvolvimento pelas quais se passam até se chegar à forma final da equação (II.2) definem outros tipos necessários de análise estrutural. Estas análises são objeto do presente estudo e são apresentadas nas seções seguintes.

II.3 - TIPOS DE ANÁLISES ENVOLVIDAS

II.3.1 - ANÁLISE LINEAR ESTATICA

Quando, para um dado sistema estrutural, os deslocamentos e as deformações são considerados pequenos, de tal forma que se possa escrever as equações de equilíbrio em relação à configuração (geometria) indeformada da estrutura, a análise será conduzida segundo uma formulação matricial linear.

A grande maioria das estruturas correntes são, em geral, calculadas usando-se a teoria linear estática.

A discretização de uma estrutura, usando a teoria linear, através do MEF, gerará a seguinte equação matricial

$$\tilde{K}_E \tilde{U} = \tilde{R} \quad (\text{ II.3 })$$

onde :

\tilde{K}_E - representa a matriz de rigidez da estrutura.

\tilde{U} - o vetor de deslocamentos de todos os graus de liberdade, no sistema global.

\vec{R} - vetor de cargas externas.

A equação (II.3) representa um sistema de equações lineares de ordem $n \times n$, onde n é o número total de graus de liberdade da estrutura.

Como resultado do que foi exposto antes, surgem duas hipóteses fundamentais necessárias para se poder afirmar que uma determinada estrutura tem um comportamento linear.

1ª HIPÓTESE - o material de que é feita a estrutura obedece à lei de HOOKE.

2ª HIPÓTESE - a configuração geométrica final não deve diferir sensivelmente da geometria inicial, de modo que as equações de equilíbrio sejam as mesmas nas duas situações.

O não cumprimento de qualquer uma destas hipóteses introduz uma não-linearidade no comportamento do sistema estrutural. A não-linearidade física decorre da violação da primeira; a não-linearidade geométrica vem do não atendimento à segunda hipótese [3].

Neste trabalho, como visto na seção II.1, será estudado o comportamento não-linear geométrico.

Comentários Sobre as Hipóteses de Pequenos Deslocamentos e Pequenas Deformações

Alguns comentários são feitos a seguir com o propósito de esclarecimento quanto às hipóteses acima descritas.

A hipótese de pequenos deslocamentos exige que as translações e as rotações dos pontos da estrutura sejam pequenas quando comparadas com as dimensões da estrutura e com a unidade, respectivamente.

A hipótese de pequenas deformações supõe que os alongamentos e distorções são pequenos quando comparados com a unidade. Sendo assim, referem-se à deformação de um volume infinitesimal do corpo.

A primeira hipótese é mais restritiva, no sentido que compreende a deformação da estrutura como um todo. Logo, dizer que uma estrutura está sujeita a pequenos deslocamentos significa dizer que à mesma é imposta pequenas deformações; o contrário não se pode afirmar.

Duas importantes simplificações surgem quando a hipótese de pequenas deformações é adotada:

(i) hipótese das seções planas - é admitido que as seções transversais inicialmente planas, permanecem planas na configuração deformada.

(ii) a segunda simplificação se refere à representação do elemento. Supõe-se que um elemento retilíneo está submetido apenas a rotações de corpo rígido, tendo como consequência importante a possibilidade de se relacionar as configurações deformada e indeformada através de uma transformação linear [4,5].

II.3.2 - ANÁLISE NÃO-LINEAR ESTATICA

De uma maneira geral, dois são os tipos de comportamento não-linear que se podem considerar para uma estrutura: a não-linearidade física e a não-linearidade geométrica. A estes dois tipos de comportamento pode-se acrescentar um terceiro, pertencente a uma categoria mais geral de problemas não-lineares, que seria a combinação dos dois tipos acima. Observa-se que no presente trabalho somente a não-linearidade geométrica é considerada.

Não-linearidade Geométrica

Quando não existe linearidade entre a carga aplicada e o deslocamento resultante desta ação, as equações de equilíbrio entre as cargas externas e os esforços internos devem ser escritas em relação à configuração deformada da estrutura.

Esta equação na forma incremental é dada por:

$$\tilde{k}_T \Delta \tilde{U} = \Delta \tilde{R} \quad (\text{ II.4 })$$

A matriz de rigidez \tilde{K}_T é função dos deslocamentos (ou esforços internos). Usualmente esta matriz é referida como matriz de rigidez tangente e quando o comportamento não-linear é de fraco a moderado, pode-se representar esta matriz pela soma

$$\tilde{K}_T = \tilde{K}_E + \tilde{K}_G \quad (\text{ II.5 })$$

onde

\tilde{K}_E - matriz de rigidez elástica linear.

\tilde{K}_G - matriz de rigidez geométrica.

O método adotado para a resolução da equação não-linear em forma incremental (eq. II.6), juntamente com a descrição detalhada do algoritmo aplicado a estruturas aporticadas espaciais estaiadas, objeto deste trabalho, serão vistos no capítulo III.

$$[\tilde{K}_E + \tilde{K}_G(\Delta f)] \Delta \tilde{U} = \Delta \tilde{R} \quad (\text{II.6})$$

Observa-se que a equação de equilíbrio (II.6) é adequada para a análise de estruturas cujo comportamento é dominado por esforços internos extensionais, Δf , constituindo-se em aproximações razoáveis para aquelas de comportamento fracamente (moderadamente) não-linear.

Matriz de Rigidez Geométrica

Existem na literatura várias designações para a matriz \tilde{K}_G : matriz de rigidez geométrica, matriz de rigidez incremental, matriz de rigidez com tensões iniciais, ou ainda matriz de estabilidade. Estas designações estão diretamente relacionadas com a participação desta matriz dentro da análise. Assim, o nome matriz de rigidez geométrica [6-8] é devido à possibilidade de correção de geometria que a mesma fornece dentro do processo não-linear. A denominação matriz de rigidez incremental vem do fato de ser esta, a matriz que deve ser somada à matriz elástica

linear para a obtenção de novos deslocamentos incrementais. Matriz de rigidez com tensões iniciais vem em função da mesma ser dependente do estado de tensões (forças) nos elementos quando se vai inicializar um novo incremento de cargas. Finalmente, matriz de estabilidade [9] surge da ligação existente com a análise estática linearizada de equilíbrio crítico, associada com a condição de frequência nula na equação (II.2) de autovalor

$$(\tilde{K}_E + \lambda \tilde{K}_G) \tilde{\Phi} = 0 \quad (\text{II.2a})$$

onde λ representa um parâmetro único de carregamento externo. Observa-se que neste caso $\lambda = \lambda_{cr}$ é o parâmetro de carga crítica e $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_{cr}$ é o modo crítico associado.

Importância da Análise Não-linear

A busca, cada vez maior, de estruturas mais esbeltas e da plena utilização do material faz com que o comportamento estrutural destas estruturas seja descrito por equações de equilíbrio não-lineares. Isto tem proporcionado um enorme avanço no desenvolvimento de formulações não-lineares e de técnicas numéricas eficientes para resolver as equações resultantes destas formulações.

Foi na indústria aeroespacial, devido à demanda de projetos que necessitavam de investigações de novos conceitos estruturais e novas técnicas de fabricação, que primeiro se fez sentir a ausência de estudos dentro do campo das não-linearidades. Determinados sistemas estruturais freqüentemente são passíveis de efeitos não-lineares significantes, dentre eles podemos citar: cascas delgadas,

sistemas de cabos, plataformas marítimas, etc. Contudo, deve-se ter em mente que nem sempre se tem conhecimento prévio dos efeitos das não-linearidades sobre o comportamento de um determinado sistema estrutural esbelto e, neste caso, a dúvida continuará até que uma análise não-linear seja realizada.

O atraente no campo das não-linearidades é a investigação de formulações mais requintadas com a inclusão de efeitos que antes eram desprezados. Por outro lado, deve-se saber discernir o campo de aplicação dessas formulações a fim de não aplicá-las a problemas onde não se façam necessárias.

A aplicação de uma análise linear em detrimento de uma análise não-linear pode ser vista sob dois aspectos:

(i) quando os efeitos não-lineares se processam de tal forma que a estrutura ganha rigidez, o uso de uma análise linear conduz a uma estrutura segura, mas pouco eficiente do ponto de vista de aproveitamento do material. A figura II.6 ilustra essa situação, onde o deslocamento u^* será alcançado para uma carga $P_{NL} > P_L$.

(ii) quando, por outro lado, esses efeitos não-lineares resultam em perda de rigidez ou instabilidade estrutural, a utilização de uma análise linear pode reduzir significativamente a margem de segurança, mascarando inclusive a possibilidade de colapso por instabilidade elástica da estrutura para o nível de carga aplicada. A figura II.7 ilustra esta outra situação onde o deslocamento u^* será alcançado para uma carga $P_{NL} < P_L$.

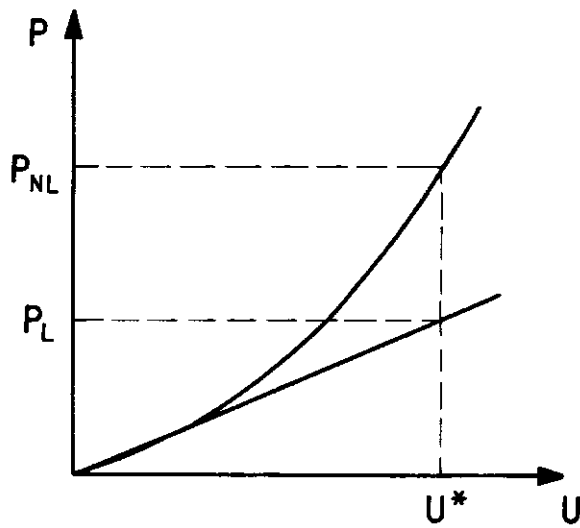


FIG. II.6 - COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR COM GANHO DE RIGIDEZ.

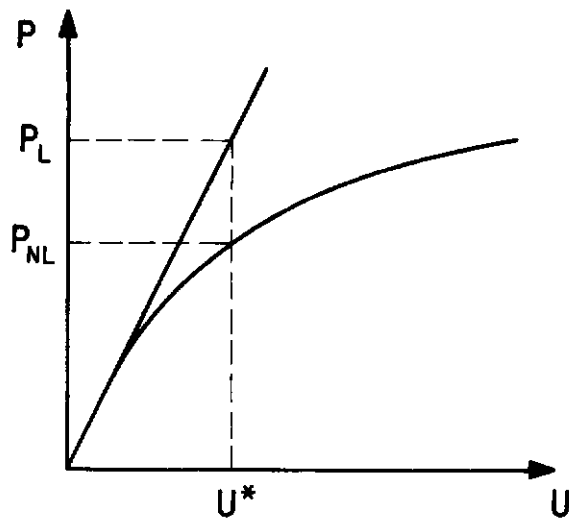


FIG. II.7 - COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR COM PERDA DE RIGIDEZ.

II.3.3 - ANÁLISE DE VIBRAÇÃO LIVRE

A necessidade de uma análise dinâmica ser efetuada ou não, fica fácil de ser decidida nos casos em que existe uma variação no tempo do carregamento externo aplicado, como por exemplo em: estruturas sujeitas a abalos sísmicos, estruturas sujeitas à ação de vento, estruturas sujeitas à ação do mar, edifícios industriais portadores de máquinas vibratórias, etc. Existem, contudo, determinadas estruturas para as quais somente as características dinâmicas básicas são buscadas para que se possa avaliar a possibilidade de ocorrência de uma condição indesejável de quase ressonância. Nestes casos, é necessário que se saibam as frequências dominantes de excitação do carregamento externo a fim de se fazer uma comparação com as frequências naturais da estrutura a ser analisada. Estas frequências naturais são obtidas do problema de vibrações livres não-amortecidas, o qual é expresso pela seguinte equação diferencial de movimento, em forma matricial.

$$\tilde{M} \ddot{\tilde{U}} + \tilde{K} \tilde{U} = 0 \quad (\text{ II.7 })$$

Onde:

\tilde{M} - é a matriz de massa do sistema.

\tilde{K} - é a matriz de rigidez.

\tilde{U} - é o vetor contendo os deslocamentos nodais.

Uma solução para a equação (II.7) pode ser buscada na

forma

$$\underline{U} = \underline{\Phi} \cos (\omega t) \quad (II.8)$$

Onde:

ω - é uma frequência natural de vibração.

$\underline{\Phi}$ - é um vetor de amplitudes dos deslocamentos nodais.

Da substituição de (II.8) em (II.7) é obtido o problema de autovalor [10,11],

$$\underline{K} \underline{\Phi}_i = \omega_i^2 \underline{M} \underline{\Phi}_i, \quad i = 1, n \quad (II.9)$$

do qual $\underline{\Phi}_i$ e ω_i^2 devem ser determinados.

A solução da equação (II.9) fornece um conjunto de n pares de autovalores e autovetores $(\omega_i^2, \underline{\Phi}_i)$, com $i = 1, n$, onde n é o número de graus de liberdade da estrutura, resultante de sua discretização.

Os modos de vibração $\underline{\Phi}_i$ podem ser tomados de maneira a satisfazer uma \underline{M} -ortonormalidade (ortonormalidade em relação à matriz de massa) e \underline{K} - ortogonalidade, possibilitando-se escrever:

$$\underline{\Phi}^t \underline{M} \underline{\Phi} = \underline{I} \quad (II.10)$$

e

$$\underline{\Phi}^t \underline{K} \underline{\Phi} = \underline{\Omega} \quad (II.11)$$

Sendo \underline{I} a matriz identidade, $\underline{\Phi}$ a matriz modal, cujas

colunas são os modos de vibração ordenados

$$\tilde{\Phi} = [\tilde{\Phi}_1 \tilde{\Phi}_2 \quad \tilde{\Phi}_n] \quad (\text{II.12})$$

e $\tilde{\Omega}$ a matriz espectral, diagonal, cujos elementos são os autovalores ordenados

$$\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & \\ & \omega_2^2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

com isto a equação (II.9) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\tilde{K} \tilde{\Phi} = \tilde{\Omega} \tilde{M} \tilde{\Phi} \quad (\text{II.14})$$

Importância da Análise de Vibração Livre

A importância, dentro da análise estrutural, dos resultados de uma análise de vibração livre, que são os modos e frequências naturais de vibração, advém dos seguintes fatos, entre outros:

1) as frequências naturais e seus respectivos modos de vibração estão ligados intrinsecamente às propriedades dinâmicas da estrutura, já que esses resultados são obtidos das equações diferenciais que representam o equilíbrio entre

as forças elásticas e as forças inerciais

$$\tilde{K} \tilde{U} = - \tilde{M} \ddot{\tilde{U}} \quad (\text{II.15})$$

2) as frequências naturais possibilitam verificar se a estrutura corre risco de entrar em ressonância, através do confronto das frequências de um determinado carregamento variável no tempo e as frequências naturais do sistema; ou ainda detectar alguma falha de execução ou algum dano por intermédio da comparação com frequências obtidas experimentalmente através de instrumentação na estrutura construída [12].

3) os modos de vibração são extremamente úteis para a determinação da resposta dinâmica estrutural através do método da superposição modal para a solução da equação diferencial de movimento

$$\tilde{M} \ddot{\tilde{U}} + \tilde{C} \dot{\tilde{U}} + \tilde{K} \tilde{U} = \tilde{f}(t) \quad (\text{II.16})$$

onde \tilde{U} , $\dot{\tilde{U}}$ e $\ddot{\tilde{U}}$ são, respectivamente, vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações, \tilde{C} é a matriz de amortecimento e $f(t)$ é o vetor de cargas externas variável com o tempo.

No método de superposição modal para a solução da equação (II.16), os modos de vibração são utilizados através de uma transformação de coordenadas do tipo

$$\tilde{U} = \tilde{\Phi} \tilde{X} \quad (\text{II.17})$$

com a qual pode-se resolver a equação (II.16) em termos de coordenadas generalizadas \underline{X} .

4) nos casos em que a verificação de conforto humano deve ser examinada, o conhecimento das frequências naturais da estrutura é importante. Um exemplo prático é o de vibrações de edifícios altos sob a ação de forças ambientais.

II.4 - ANÁLISE DE VIBRAÇÕES SOB TENSÕES INICIAIS:

FORMULAÇÃO MATRICIAL DO PROBLEMA

O objetivo das discussões sobre as análises apresentadas anteriormente foi o de estabelecer uma seqüência lógica que conduzisse ao problema em foco.

A intenção, portanto, é obter a equação de movimento

$$\underline{\tilde{M}} \ddot{\underline{U}} + (\underline{\tilde{K}}_E + \underline{\tilde{K}}_G) \underline{U} = \underline{0} \quad (\text{II.18}),$$

a qual gera o problema de autovalor

$$[(\underline{\tilde{K}}_E + \lambda \underline{\tilde{K}}_G) - \omega^2 \underline{\tilde{M}}] \underline{\Phi} = \underline{0} \quad (\text{II.19})$$

fornecendo frequências e modos de vibração do sistema estrutural em torno da configuração deformada de equilíbrio. Entende-se que o comportamento não-linear desses sistemas possa ser representado pela equação incremental de equilíbrio (II.4).

Geralmente, quando se vai formular a equação de movimento para um problema dinâmico, um dos três princípios

é usado: Princípio de D'Alembert, Princípio dos Trabalhos Virtuais ou Princípio de Hamilton. Aqui, é usado o princípio dos trabalhos virtuais [3,5,10] cuja maior vantagem apresentada é que as contribuições de " trabalho-virtual " são quantidades escalares e podem ser adicionadas algebricamente, enquanto as forças atuando sobre a estrutura são vetoriais e só podem ser somadas vetorialmente.

Aplicando-se então este princípio

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad (II.20)$$

e empregando-se o método dos elementos finitos, onde as variáveis definidas em cada ponto do elemento são aproximadas por funções de interpolação, expressas em termos de parâmetros nodais [13], tem-se, somando as contribuições de todos os elementos em que foi discretizada a estrutura

$$\sum_{nelm} \left(\int_v \delta \underline{\varepsilon}^t \underline{\sigma} dv = \int_v \delta \underline{U}^t \underline{f}_m dv + \right. \\ \left. \int_s \delta \underline{U}^t \underline{f}_s ds + \sum_i \delta \underline{U}_i^t \underline{F}_i \right) \quad (II.20a)$$

Sabe-se que, no estudo das vibrações livres sob tensões iniciais não amortecidas, o vetor das forças de superfície, \underline{f}_s , e o vetor das forças concentradas, \underline{F}_i , são considerados parâmetros [14].

Assim, a equação (II.20a) pode ser reescrita como

$$\sum_{n \in l_m} \left(\int_v \delta [(\underline{\varepsilon}_F^t + \underline{\varepsilon}_I^t) (\underline{\sigma}_F + \underline{\sigma}_I)] dv = \int_v \delta \underline{U}^t \underline{f}_m dv \right) \quad (\text{II.21})$$

Onde,

$$\sum_{n \in l_m} \left(\int_v \delta \underline{\varepsilon}_F^t \underline{\sigma}_F dv = \int_s \delta \underline{U}^t \underline{f}_s ds + \sum_i \delta \underline{U}_i^t \underline{F}_i \right) \quad (\text{II.22})$$

\underline{U} - é o vetor de deslocamentos.

\underline{U}_i - é o vetor de deslocamentos segundo às direções das forças concentradas \underline{F}_i .

$\underline{\varepsilon}_T = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}]$ - é o vetor das deformações totais.

$\underline{\sigma}_T = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}]$ - é o vetor das tensões totais.

\underline{f}_m - é o vetor das forças de massa aplicadas no interior do corpo.

V - é o volume do corpo.

s - é a superfície do corpo

δ - é usado para indicar incremento virtual das grandezas.

Tem-se que $\underline{\varepsilon}_T = \underline{\varepsilon}_F + \underline{\varepsilon}_I$ e $\underline{\sigma}_T = \underline{\sigma}_F + \underline{\sigma}_I$. $\underline{\varepsilon}_F$ e $\underline{\varepsilon}_I$ representam as parcelas fundamentais e incrementais dos vetores $\underline{\varepsilon}$ e $\underline{\sigma}$. As parcelas fundamentais são constantes e oriundas do carregamento externo (isto é, de \underline{f}_s , \underline{F}_i e parte de \underline{f}_m , correspondente às forças de gravidade) e as parcelas incrementais correspondem à variação das forças elásticas do sistema em vibração.

Sob vibração livre, o vetor de forças de massa contém somente as forças de inércia, as quais são dadas, segundo o

Princípio de D'Alembert [9,10], por:

$$\underline{\tilde{f}}_m = - \mu \ddot{\underline{U}} \quad (\text{II.23})$$

onde,

μ - é a massa específica (peso específico / aceleração da gravidade).

$\ddot{\underline{U}}$ - é o vetor de acelerações.

Levando (II.23) em (II.21)

$$\sum_{n \in \text{elm}} \left(\int_v \delta [(\underline{\tilde{\varepsilon}}_F^t + \underline{\tilde{\varepsilon}}_I^t) (\underline{\tilde{\sigma}}_F + \underline{\tilde{\sigma}}_I)] dv = - \int_v \delta \underline{\tilde{U}}^t \mu \ddot{\underline{U}} dv \right) \quad (\text{II.24a})$$

ou, lembrando que $\underline{\tilde{\varepsilon}}_F$ e $\underline{\tilde{\sigma}}_F$ são constantes

$$\sum_{n \in \text{elm}} \left(\int_v \delta \underline{\tilde{U}}^t \mu \ddot{\underline{U}} dv + \int_v \delta \underline{\tilde{\varepsilon}}_I^t \underline{\tilde{\sigma}}_T dv + \int_v \delta \underline{\tilde{\varepsilon}}_I^t \underline{\tilde{\sigma}}_I dv \right) = 0 \quad (\text{II.24b})$$

No MEF, o vetor de deslocamentos de um ponto de um elemento é obtido a partir do vetor de deslocamentos nodais através das funções de interpolação. Portanto, podemos representar estes deslocamentos por:

$$\underline{\tilde{u}}_T^e = \underline{\tilde{N}} \underline{\tilde{U}}_T^e \quad (\text{II.25})$$

Onde,

$\underline{\tilde{u}}_T^e$ - é o vetor de deslocamentos de um ponto do elemento "e"; $\underline{\tilde{u}}_T^e = \underline{\tilde{u}}_F^e + \underline{\tilde{u}}_I^e$

\tilde{N} - é a matriz das funções de interpolação.

\tilde{U}_T^e - é o vetor de deslocamentos nodais do elemento "e";

$$\tilde{U}_T^e = \tilde{U}_F^e + \tilde{U}_I^e$$

Um incremento virtual dos deslocamentos será representado por:

$$\delta \tilde{u}_T^e = \tilde{N} \delta \tilde{U}_T^e \quad (\text{ II.26 })$$

O estado de deformação do corpo é representado através do tensor de Green [5],

$$\varepsilon_T = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}] \quad (\text{ II.27 })$$

que contém termos não-lineares de segunda ordem, que são claramente expostos em notação indicial por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j} \right) \quad (\text{ II.28 })$$

onde

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

e

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Nota-se que o subíndice r foi omitido por conveniência de escrita.

As outras componentes de deformação podem ser obtidas de (II.28), através da variação dos índices i, j , lembrando que k (índice mudo) indica o somatório do produto $u_{k,i} u_{k,j}$ e que

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{ij}, \quad i \neq j \quad (\text{II.29})$$

Analisando as componentes do vetor de deformações, percebe-se que o mesmo pode ser representado como uma soma de duas parcelas

$$\tilde{\epsilon}_T = (\tilde{\epsilon}_L + \tilde{\epsilon}_{NL})_T \quad (\text{II.30})$$

Onde,

$\tilde{\epsilon}_L$ - se refere ao vetor de deformações que deve ser adotado quando se considera a geometria indeformada.

$\tilde{\epsilon}_{NL}$ - se refere ao vetor de deformações que contribui com termos que devem ser considerados quando se considera a geometria deformada.

Como as deformações específicas são obtidas através da

derivação dos deslocamentos, obtém-se a seguinte relação entre deformação e deslocamento:

$$\underline{\varepsilon}_I = \underline{\bar{B}} \underline{U}_I^e \quad (\text{ II.31a })$$

$$\underline{\varepsilon}_F = \underline{\bar{B}} \underline{U}_F^e \quad (\text{ II.31b })$$

A barra sobre as matrizes $\underline{\bar{B}}$ indica que as relações deformações-deslocamentos serão não-lineares para grandes deslocamentos.

Sendo assim, as matrizes $\underline{\bar{B}}$ serão dependentes dos deslocamentos \underline{U} e poderão ser escritas sob a forma

$$\underline{\bar{B}} = \underline{B} + \hat{\underline{B}} (\underline{U}^e) \quad (\text{ II.32 })$$

Onde,

\underline{U}^e - pode ser o vetor de deslocamentos fundamentais \underline{U}_F^e ou incrementais, \underline{U}_I^e .

\underline{B} - é a matriz das funções de interpolação, obtidas através da derivação de \underline{N} ; sendo esta última idêntica à utilizada para pequenos deslocamentos.

$\hat{\underline{B}} (\underline{U}^e)$ - é a matriz das funções de interpolação dependente dos deslocamentos incrementais \underline{U}_I^e ou fundamentais, \underline{U}_F^e .

Substituindo (II.32) nas correspondentes (II.31), fica-se com:

$$\underline{\varepsilon}_I = \underline{B} \underline{U}_I^e + \hat{\underline{B}} (\underline{U}_I^e) \underline{U}_I^e \quad (\text{ II.33a })$$

$$\underline{\varepsilon}_F = \underline{B} \underline{U}_F^e + \hat{\underline{B}} (\underline{U}_F^e) \underline{U}_F^e \quad (\text{ II.33b })$$

Considerando um incremento virtual δ como um operador diferencial e lembrando que \underline{U}_F^e é um vetor de parâmetros definindo a configuração deformada fundamental, tem-se para

$\delta \underline{\varepsilon}_T$

$$\delta \underline{\varepsilon}_T = \overline{\underline{B}} \delta \underline{U}_F^e + \underline{B} \delta \underline{U}_I^e + \hat{\underline{B}} (\underline{U}_I^e) \delta \underline{U}_I^e$$

$$\therefore \delta \underline{\varepsilon}_T = \overline{\underline{B}} \delta \underline{U}_I^e = \delta \underline{\varepsilon}_I \quad (\text{ II.34 })$$

Substituindo (II.25), (II.26) e (II.34) em (II.24b) e lembrando que $\delta \underline{U}^e$ são deslocamentos virtuais arbitrários chega-se a

$$\sum_{n \in \text{elm}} \left(\int_V \rho \underline{N}^t \underline{N} dv \underline{\ddot{U}}_I^e + \int_V \overline{\underline{B}}^t \underline{\sigma}_I dv + \int_V \hat{\underline{B}}^t \underline{\sigma}_F dv \right) = 0$$

(II.35)

ou

$$\sum_{n \in \text{elm}} \left(\underline{m} \underline{\ddot{U}}_I^e + \int_V \overline{\underline{B}}^t \underline{\sigma}_I dv + \int_V \hat{\underline{B}}^t \underline{\sigma}_F dv \right) = 0$$

(II.36)

Onde,

$\underline{m} = \int \rho \underline{N}^t \underline{N} dv$ - é a matriz de massa consistente do elemento. O nome consistente vem do fato de se adotar as mesmas funções de interpolação dos

deslocamentos.

$\underline{\sigma}_F$ e $\underline{\sigma}_I$ - são respectivamente os vetores das tensões fundamentais e incrementais, que para um material elástico linear, podem ser escritos como

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad (\text{ II.37 })$$

ou ainda, com $\underline{\varepsilon}$ dado por (II.31)

$$\underline{\sigma}_I = \underline{D} \underline{\bar{B}} \underline{U}_I^e \quad (\text{ II.38a })$$

$$\underline{\sigma}_F = \underline{D} \underline{\bar{B}} \underline{U}_F^e \quad (\text{ II.38b })$$

Substituindo (II.38) em (II.36), vem

$$\sum_{n \in l m} \left(\underline{m} \underline{\ddot{U}}_I^e + \int_v \underline{\bar{B}}^t \underline{D} \underline{B} \underline{U}_I^e \, dv + \int \underline{\hat{B}}^t \underline{D} \underline{\bar{B}} \underline{U}_F^e \, dv \right) = 0$$

$$(\text{ II.39a })$$

com $\underline{\bar{B}}$ dado por (II.32), tem-se:

$$\sum_{n \in l m} \left[\underline{m} \underline{\ddot{U}}_I^e + \int_v (\underline{\bar{B}}^t \underline{D} \underline{B} + \underline{B}^t \underline{D} \underline{\hat{B}} + \underline{\hat{B}}^t \underline{D} \underline{B} + \underline{\hat{B}}^t \underline{D} \underline{\hat{B}}) \, dv \underline{U}_I^e + \int_v (\underline{\hat{B}}^t \underline{D} \underline{B} + \underline{\hat{B}}^t \underline{D} \underline{\hat{B}}) \, dv \underline{U}_F^e \right] = 0$$

$$(\text{ II.39b })$$

ou

$$\sum_{nelm} \left[\underline{m} \ddot{\underline{U}}_I^e + \int_V \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} dv \underline{U}_I^e + \int_V (\underline{B}^t \underline{D} \hat{\underline{B}} + \hat{\underline{B}}^t \underline{D} \underline{B} + \right. \\ \left. \hat{\underline{B}}^t \underline{D} \hat{\underline{B}}) dv \underline{U}_I^e + \int_V (\hat{\underline{B}}^t \underline{D} \underline{B} + \hat{\underline{B}}^t \underline{D} \hat{\underline{B}}) dv \underline{U}_F^e \right] = 0 \\ (II.40)$$

Onde, no 1º termo,

\underline{m} é a matriz de massa , definida em (II.36)

no 2º termo,

$\underline{K}_E = \int_V \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} dv$ - é a matriz de rigidez elástica do elemento para pequenos deslocamentos incrementais.

no 3º termo,

$\hat{\underline{K}} = \int_V (\underline{B}^t \underline{D} \hat{\underline{B}} + \hat{\underline{B}}^t \underline{D} \underline{B} + \hat{\underline{B}}^t \underline{D} \hat{\underline{B}}) dv$ - é a matriz de rigidez do elemento devido à consideração de grandes deslocamentos.

Pode-se mostrar que no 4º termo de (II.40), oriundo do 3º termo de (II.36), aparece a matriz de rigidez geométrica \underline{K}_G [15],

$$\int_V \hat{\underline{B}} (\underline{U}_I^e) \underline{\sigma}_F dv = \int_V (\hat{\underline{B}}^t \underline{D} \underline{B} + \hat{\underline{B}}^t \underline{D} \hat{\underline{B}}) dv \underline{U}_F^e = \underline{K}_G \underline{U}_I^e \\ (II.41)$$

A equação (II.40) pode ser escrita sob o seguinte

aspecto:

$$\sum_{nelm} \left(\tilde{m} \ddot{\tilde{U}}_I^e + \tilde{K}_T \tilde{U}_I^e \right) = 0 \quad (II.42)$$

Onde:

$$\tilde{K}_T = \tilde{K}_E + \tilde{K}_G + \hat{\tilde{K}} \quad - \quad \text{é denominada matriz de rigidez tangente [16,17].}$$

Supondo-se que os deslocamentos incrementais dinâmicos da estrutura, vibrando em torno da configuração fundamental deformada de equilíbrio estático, não sejam grandes, de tal forma que se possa desprezar as contribuições de $\hat{\tilde{K}}$, será suficiente representar a matriz \tilde{K}_T por:

$$\tilde{K}_T = \tilde{K}_E + \tilde{K}_G \quad (II.43)$$

Neste caso, a equação (II.42) fica reduzida a:

$$\sum_{nelm} \left(\tilde{m} \ddot{\tilde{U}}_I^e + (\tilde{K}_E + \tilde{K}_G) \tilde{U}_I^e \right) = 0 \quad (II.44)$$

Somando as contribuições de todas as matrizes dos respectivos elementos, obtém-se um sistema de equações válida para toda a estrutura e que representa a equação de movimento, dada por:

$$\tilde{m} \ddot{\tilde{U}}_I + (\tilde{K}_E + \tilde{K}_G) \tilde{U}_I = 0 \quad (II.45)$$

Derivação do Problema de Autovalor

Adotando uma solução para o vetor de deslocamentos \tilde{U}_I na equação (II.45), tal como na seção II.3.3, do tipo:

$$\tilde{U}_I = \tilde{\Phi} \cos (\omega t)$$

onde os parâmetros acima foram definidos naquela seção, tem-se:

$$[(\tilde{K}_E + \tilde{K}_G) - \omega^2 \tilde{M}] \tilde{\Phi} = 0 \quad (II.46)$$

ou

$$(\tilde{K}_E + \tilde{K}_G) \tilde{\Phi} = \omega^2 \tilde{M} \tilde{\Phi} \quad (II.46a)$$

A equação acima representa um problema de autovalor generalizado e, como mostrado na seção II.3.3, fornece um conjunto de n pares de autovalores e autovetores $(\omega_i^2, \tilde{\Phi}_i)$, com $i = 1, n$ e n igual ao n° de graus de liberdade da estrutura. Pode-se verificar, contudo, em comparação com a equação (II.9), que a equação (II.46a) permite determinar as modificações ocorridas nas características dinâmicas (frequências e modos) da estrutura decorrente da presença de um estado de tensões (ou forças) iniciais. Em outras palavras, pode-se dizer que a equação (II.46a) possibilita a obtenção das frequências e modos de vibração do sistema estrutural em torno de uma configuração deformada de equilíbrio de uma estrutura de comportamento não-linear geométrico, cuja rigidez global é representada pela soma

matricial $\tilde{K}_E + \tilde{K}_G$.

Só para enfatizar, as propriedades inerentes ao problema de autovalor representado pela equação (II.9) da seção II.3.3 são também válidas para o problema de autovalor dado por (II.46a).

Portanto, pode-se afirmar que sistemas estruturais estaiados, por serem flexíveis, requerem que as respostas dinâmicas no tempo sejam calculadas com a superposição de modos de vibração, obtidos com a estrutura sob um estado de tensões iniciais.

No caso da análise não-linear de estruturas aporticadas espaciais estaiadas, o equilíbrio estático para um incremento $\Delta \tilde{R}$ de carregamento pode ser representado por $\tilde{K}_T \Delta \tilde{U} = \Delta \tilde{R}$, sendo a matriz de massa \tilde{M} e a matriz de rigidez tangente \tilde{K}_T , para toda a estrutura, formada das seguintes contribuições:

$$\tilde{M} = \tilde{M}^{P.E} + \tilde{M}^{C.T} \quad (\text{ II.47 })$$

$$\tilde{K}_T = \tilde{K}_T^{P.E} + \tilde{K}_T^{C.T} \quad (\text{ II.48 })$$

onde:

P.E e C.T se referem, respectivamente, aos elementos de pórtico espacial e de cabo/treliça e,

$$\tilde{K}_T^{P.E} = \tilde{K}_E^{P.E} + \tilde{K}_G^{P.E} \quad (\text{ II.49a })$$

$$\tilde{K}_T^{C.T} = \tilde{K}_E^{C.T} + \tilde{K}_G^{C.T} \quad (\text{ II.49b })$$

Descrições mais detalhadas acerca da formação das matrizes (II.47 e II.48) serão apresentadas nos capítulos

III e IV.

II.5 - CARGAS CRÍTICAS COM CRITÉRIO DE FREQUÊNCIA NULA ($\omega^2 = 0$)

Se o estado de tensões (ou forças) for tal que implique na redução de rigidez, pode-se usar a equação (II.46) para determinação das cargas críticas.

Considere um estado de tensões iniciais, determinado por um parâmetro λ , que permita escrever:

$$\tilde{K}_G = \lambda \bar{\tilde{K}}_G \quad (\text{ II.50 })$$

onde $\bar{\tilde{K}}_G$ é a matriz de rigidez geométrica para $\lambda = 1$.

Substituindo (II.50) em (II.46), fica-se com:

$$[(\tilde{K}_E + \lambda \bar{\tilde{K}}_G) - \omega^2 \tilde{M}] \tilde{\Phi} = \tilde{0} \quad (\text{ II.51 })$$

Tirando-se partido da relação linear existente entre λ e ω^2 , pode-se, através da equação (II.51), determinar o valor crítico de λ encontrando dois pares coordenados (λ , ω^2) e construindo o gráfico $\lambda \times \omega^2$, mostrado na figura II.8. Através da extrapolação da reta, ligando os dois pontos P_{o1} e P_{o2} , que interceptará o eixo dos " λ ", determina-se o ponto crítico $\lambda = \lambda_{\text{critico}}$, para o qual $\omega^2 = 0$. O procedimento numérico de cálculo para determinação dos pontos P_{o1} e P_{o2} será apresentado na seção III.5.

Podemos dizer, então, que o valor do carregamento estático que faz com que a i -ésima frequência circular natural tenda a zero corresponde à i -ésima carga crítica, e

a forma modal para esta frequência representa o i -ésimo modo crítico. Geralmente, o interesse é voltado para a 1ª. frequência circular natural, correspondente ao menor carregamento crítico da estrutura.

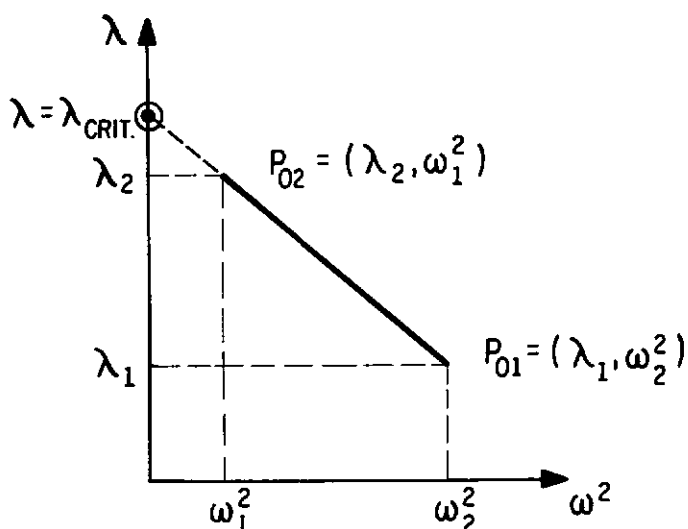


FIG. II.8 - CARGA CRÍTICA COM CRITÉRIO DE FREQUÊNCIA NULA.

Este critério ($\omega^2=0$) para determinação de carga crítica permite um entendimento claro em termos de comportamento dinâmico estrutural, pois o anulamento da 1ª. frequência corresponde a uma divergência na resposta transiente da estrutura, que implica em acréscimos de amplitudes e acelerações no modo considerado, afastando a estrutura da sua configuração deformada original de equilíbrio.

Uma das vantagens de se usar esse critério de carga crítica é a possibilidade de realização de ensaios de laboratórios não-destrutivos, estimando-se a carga crítica através da medição da variação das frequências com o acréscimo do carregamento.

CAPÍTULO III

ALGORITMO NUMÉRICO PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

III.1 - INTRODUÇÃO

O principal objetivo deste capítulo é descrever o procedimento numérico adotado para solucionar a equação (II.4) quando aplicada a estruturas aporticadas espaciais, estaiadas através de sistemas de cabos. Os sistemas estaiados aqui tratados sofrem deslocamentos apenas moderados, apesar da grande flexibilidade de seus componentes, principalmente dos cabos. A configuração deformada de equilíbrio estático não difere tanto da configuração geométrica original, ou indeformada, o que permite se adotar a matriz tangente ($\underline{K}_E + \underline{K}_G$) como aproximação suficiente para representar o comportamento não-linear de tais estruturas. Após alcançado o equilíbrio estático, a análise de vibrações do sistema estrutural sob um estado de tensões internas iniciais se constitui no objetivo final desse trabalho.

Uma descrição geral dos métodos mais usuais na análise não-linear geométrica é apresentada. Entre os vários métodos [3,6,11,15,18-24] adotados para solução do problema não-linear, optou-se pelo método de Newton-Raphson por ser o que apresenta comportamento numérico mais estável.

III.2 - GENERALIDADES

Faz parte da análise de uma estrutura pelo MEF, o exame crítico dos resultados decorrentes da solução do problema em questão. É evidente que esses resultados devem representar de modo eficiente o verdadeiro comportamento da estrutura. Assim, para estruturas cujo comportamento é não-linear, é imposta uma atenção muito especial na parte de análise, pois que esses problemas envolvem complexidades maiores relativos a custo de análise, estabilidade numérica do algoritmo, precisão dos resultados; requerendo, portanto, do usuário, um conhecimento considerável em termos de análise estrutural, a fim de assegurá-lo quão exato está a sua solução. Necessário se faz então que o usuário de algoritmos não-lineares tenha uma certa experiência no tratamento de problemas não-lineares de modo que possa tomar decisões e interpretar os resultados corretamente.

O surgimento de novos materiais e de projetos de estruturas mais esbeltas têm favorecido o aumento de análises de problemas não-lineares. Várias são as formulações e os algoritmos encontrados na literatura técnica para tratamento desses problemas. Devido à diversificação existente para designações desses métodos, alguns pesquisadores [3,19,23,24] têm tido a preocupação de agrupá-los, com o intuito de esclarecer os procedimentos numéricos adotados para obtenção da resposta não-linear. Assim, quando se pesquisa sobre algoritmos numéricos para problemas não-lineares é comum se encontrar métodos (algoritmos) que, apesar de trabalharem de maneira idêntica

ou com pequenas variações, são designados diferentemente. Portanto, foi com esta mesma preocupação que se procura a seguir identificar e descrever tais métodos.

O objetivo é fornecer uma visão geral dos processos empregados na análise não-linear geométrica de modo a se ter condições de implementá-los computacionalmente.

Pode-se dividir em dois grupos básicos [3] os processos adotados para resolução do sistema de equações algébricas não-lineares na análise estrutural: os processos incrementais e os iterativos. Um terceiro, misto dos dois primeiros, são os incrementais-iterativos.

Para facilitar a descrição dos processos, far-se-á uso do gráfico carga x deslocamento para um grau de liberdade do sistema.

III.2.1 - PROCESSO INCREMENTAL

Neste processo [3,19,24], o carregamento total da estrutura é aplicada em incrementos (ou etapas) de carga (P_{inc}), correspondendo à cada etapa de carga uma configuração de equilíbrio diferente. Os incrementos de tensões e deformações são computados considerando-se um comportamento linear dentro de cada etapa. Os deslocamentos e esforços totais ao final de alguma etapa de carga são obtidos pelo somatório dos deslocamentos e esforços incrementais até esta etapa. Tem-se assim que o processo consiste em se resolver uma série de problemas lineares, correspondente às etapas, onde para cada início do incremento a matriz de rigidez da estrutura é reavaliada,

levando-se em conta a geometria determinada no final da etapa de carga anterior. O gráfico representativo deste processo encontra-se na figura III.1.

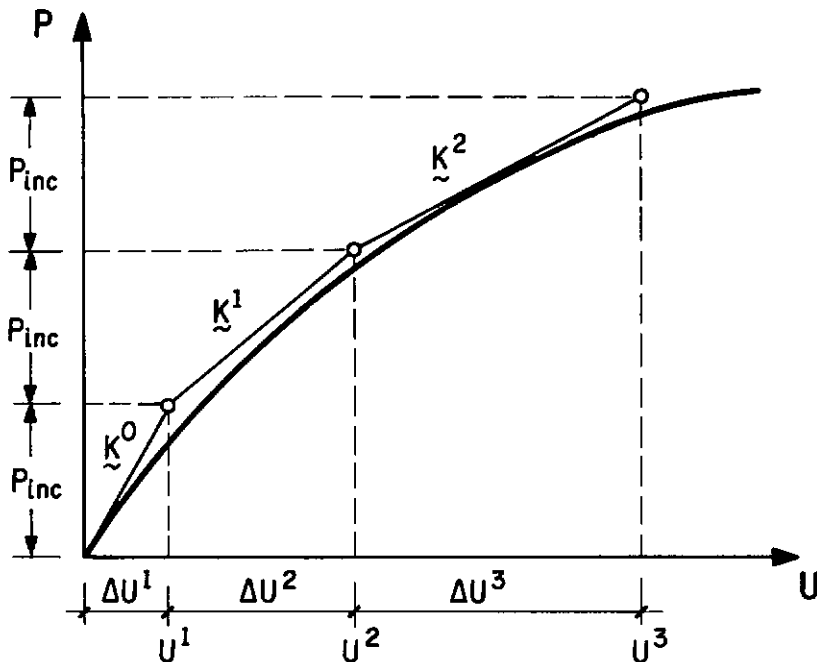


FIG. III.1 - ESQUEMA DO PROCESSO INCREMENTAL.

O procedimento de resolução é representado matricialmente pela seguinte expressão:

$$\tilde{K}^{i-1} \Delta \tilde{U}^i = \tilde{P}_{inc} \quad (\text{ III.1 })$$

onde \tilde{K} segundo VENÂNCIO [3] e CHAJES [19] é dada por $\tilde{K}_E + \tilde{K}_G$; $\Delta \tilde{U}^i$ representa o incremento de deslocamento devido ao i-ésimo incremento de carga e \tilde{P}_{inc} é o vetor incremental de carga aplicada.

Todo o processo incremental pode ser representado por:

1ª. etapa:

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{U}^1 &= (\tilde{K}^0)^{-1} \tilde{P}_{inc} \\ \tilde{U}^1 &= \Delta \tilde{U}^1\end{aligned}\quad (\text{ III.2 })$$

2ª. etapa:

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{U}^2 &= (\tilde{K}^1)^{-1} (\tilde{U}^1) \tilde{P}_{inc} \\ \tilde{U}^2 &= \Delta \tilde{U}^1 + \Delta \tilde{U}^2\end{aligned}\quad (\text{ III.3 })$$

3ª. etapa:

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{U}^3 &= (\tilde{K}^2)^{-1} (\tilde{U}^2) \tilde{P}_{inc} \\ \tilde{U}^3 &= \Delta \tilde{U}^1 + \Delta \tilde{U}^2 + \Delta \tilde{U}^3\end{aligned}\quad (\text{ III.4 })$$

e assim, até a última etapa de carga.

A partida do processo, 1ª. etapa de carga, é realizada com a matriz de rigidez elástica.

Como foi visto, nenhum equilíbrio foi feito no final de cada etapa de carga. Os erros devido à aproximação do processo são acumulados. Portanto, a precisão nos resultados finais está diretamente condicionada à quantidade de incrementos em que é dividida a carga total. Este processo é designado por CHAJES [19] como método incremental linear.

III.2.2 - PROCESSO ITERATIVO

Este processo é descrito graficamente na figura III.2. A carga total (\tilde{P}_{tot}) é aplicada de uma só vez. Para o primeiro passo iterativo, parte-se com a matriz de rigidez elástica. Com esta matriz e com a carga total é obtida uma solução inicial para os deslocamentos, dada por $\Delta \tilde{U}^1$. Assim, com a geometria da estrutura especificada por estes

deslocamentos, calcula-se os esforços internos nos elementos no sistema de eixo global. Possuindo a estrutura um comportamento não-linear, as forças nodais (oriundas do somatório dos esforços internos nos elementos a nível nodal) não equilibram as cargas aplicadas. Surge, então, um carregamento desequilibrado, ou seja, uma carga residual (ΔR^1) (fig. III.2) correspondente à carga externa aplicada menos as cargas nodais internas. O passo seguinte consiste em se aplicar a carga não-equilibrada (ΔR^1) com as matrizes atualizadas segundo a geometria dada pela última solução, no caso \underline{U}^1 . Obtém-se assim o incremento de deslocamento $\Delta \underline{U}^2$ referente à carga não-equilibrada ΔR^1 . Encontra-se o deslocamento atualizado ($\underline{U}^2 = \underline{U}^1 + \Delta \underline{U}^2$) e com a geometria dada por estes deslocamentos, calcula-se as forças nodais internas. Com estas forças nodais e o carregamento externo, encontra-se um novo carregamento não-equilibrado (ΔR^2). Esses passos iterativos são repetidos até que as cargas residuais sejam menores que uma tolerância requerida.

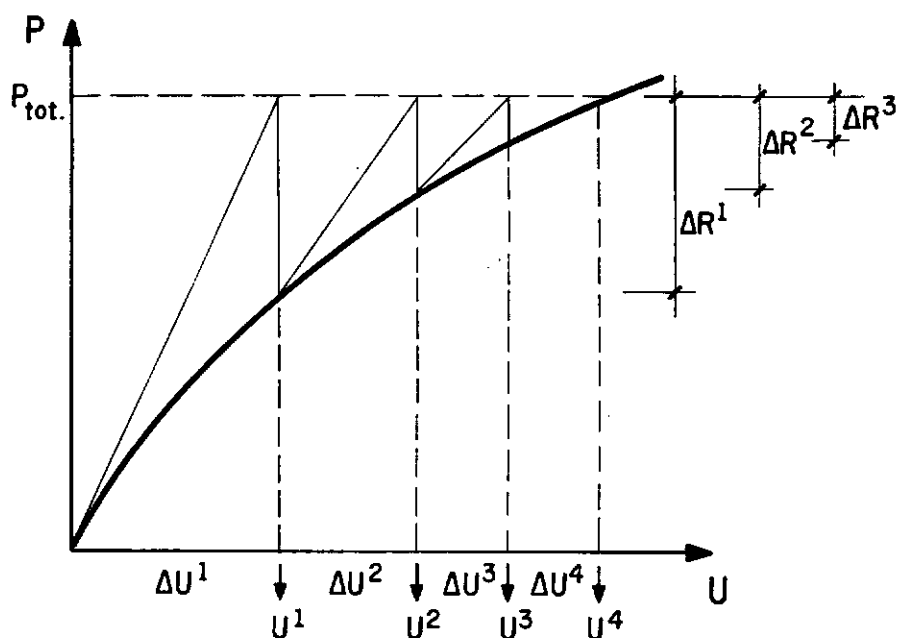


FIG. III.2 - ESQUEMA DO PROCESSO ITERATIVO.

Quando nesse processo iterativo emprega-se a matriz de rigidez tangente, tem-se o método de Newton-Raphson (MNR).

III.2.3 - PROCESSO INCREMENTAL-ITERATIVO

Para este processo o carregamento é feito por partes, sendo efetuadas iterações dentro de cada incremento.

III.2.4 - MÉTODO INCREMENTAL-ITERATIVO COM NEWTON-RAPHSON

O método iterativo de Newton-Raphson [3,6,11,15,18-24] é um dos métodos mais usados na solução de problemas não-lineares geométricos na análise estrutural. O grande sucesso deste método advém das características inerentes ao mesmo. Como exemplo destas características podemos citar: a precisão dos resultados e, em geral, a rápida convergência numérica.

O gráfico ilustrativo do processo iterativo (como descrito no item III.2.2) com Newton-Raphson é mostrado na figura III.3.

As equações de equilíbrio em forma incremental (equação (II.4)) é dada por:

$$\tilde{K}_T \Delta \tilde{U} = \Delta \tilde{R}$$

onde:

\tilde{K}_T - é a matriz de rigidez tangente global da estrutura.

$\Delta \tilde{U}$ - é o vetor de deslocamentos incrementais.

$\Delta \tilde{R}$ - é o vetor de desequilíbrio nodal - diferença entre

a carga externa aplicada e as forças nodais devidas aos esforços internos resistentes.

As relações de recorrência para resolver a equação (II.4) são:

$$\begin{aligned}\tilde{K}_T^{i-1} \Delta \tilde{U}^i &= \Delta \tilde{R}^i \\ \tilde{U}^i &= \tilde{U}^{i-1} + \Delta \tilde{U}^i \\ \Delta \tilde{R}^{i-1} &= \tilde{R} - \tilde{F}_{int}^{i-1}\end{aligned}\quad (III.8)$$

onde i se refere ao passo iterativo atual; Com as condições iniciais

$$\tilde{U}^0 = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{F}_{int}^0 = 0$$

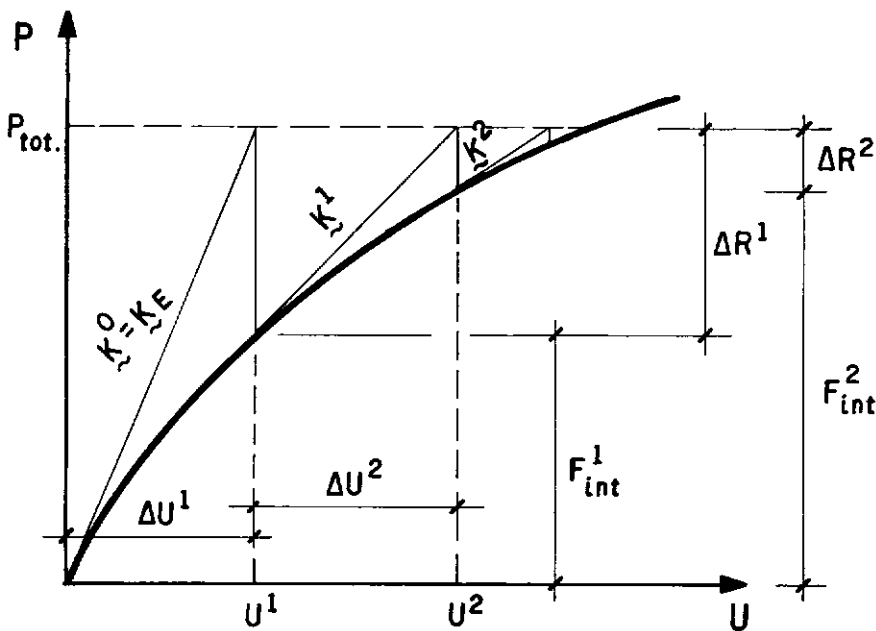


FIG. III.3 - ESQUEMA REPRESENTATIVO DO MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON.

Assim, o processo iterativo é (vide fig. III.3):

1º. passo iterativo (i=1):

$$\begin{aligned}\tilde{K}^0 \Delta \tilde{U}^1 &= \Delta \tilde{R}^0 \\ \tilde{U}^1 &= \Delta \tilde{U}^1 \\ \Delta \tilde{R}^1 &= \tilde{P}_{tot} - \tilde{K}_T^1(\tilde{U}^1) \Delta \tilde{U}^1\end{aligned}\quad (\text{ III.9 })$$

2º. passo iterativo (i=2):

$$\begin{aligned}\tilde{K}_T^1 \Delta \tilde{U}^2 &= \Delta \tilde{R}^1 \\ \tilde{U}^2 &= \tilde{U}^1 + \Delta \tilde{U}^2 \\ \Delta \tilde{R}^1 &= \tilde{P}_{tot} - [\tilde{K}_T^2(\tilde{U}^2) \Delta \tilde{U}^2 + \tilde{F}_{int}^1]\end{aligned}\quad (\text{ III.10 })$$

onde $\tilde{F}_{int}^1 = \tilde{K}_T^1(\tilde{U}^1) \Delta \tilde{U}^1.$

O processo é repetido até que o resíduo ou força não-equilibrada esteja dentro de uma tolerância definida a priori. Os critérios de convergência para parada do processo serão vistos mais adiante na seção III.2.5. Este método é identificado [19] como método incremental não-linear.

Quando as cargas são aplicadas em incrementos, o processo iterativo descrito anteriormente é aplicado para cada incremento do carregamento. Tem-se, deste modo, o método incremental-iterativo com Newton-Raphson.

A figura III.4 ilustra o procedimento incremental - iterativo.

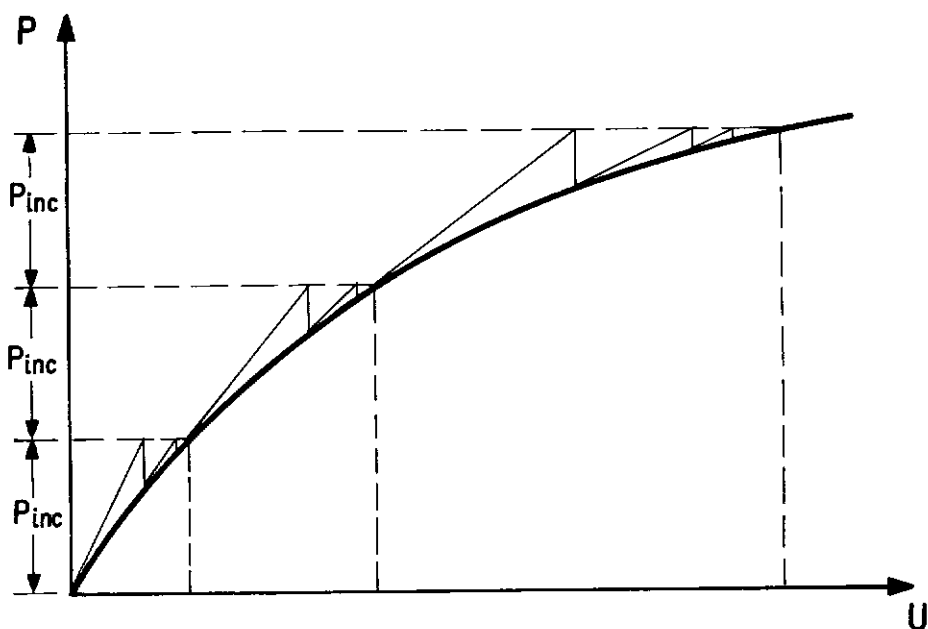


FIG. III.4 - PROCEDIMENTO INCREMENTAL-ITERATIVO.

Podemos perceber pelo gráfico da figura III.4 que o método incremental-iterativo se resume em aplicar a carga total em incrementos, escolhidos dentro de um certo critério, e aplicar para cada incremento o mesmo procedimento exposto anteriormente. Após se atingir o equilíbrio para um determinado passo, tudo se passa (veja fig. III.4) como se os eixos fossem transladados até o início de tal incremento, guardando porém a história dos incrementos anteriores. Assim, ao se inicializar um novo incremento, o contador das iterações é zerado e a primeira iteração deste novo incremento é realizada com a última matriz atualizada (avaliada) no incremento anterior.

O MNR apesar de ser eficiente é, em termos computacionais, bastante dispendioso haja vista a necessidade de atualização e fatoração da matriz de

rigidez do sistema a cada iteração. Isto para problemas não-lineares (casos da prática) implica num esforço computacional elevado, surgindo a necessidade de torná-lo mais eficaz com o intuito de diminuir o tempo de análise do problema.

O método iterativo de Newton-Raphson modificado [6,11,15,18,23] é uma das variações do MNR clássico, onde a matriz de rigidez tangente, dependendo do grau de não-linearidade do problema, é reavaliada [19] considerando-se 1, 2, ou mais incrementos de carga; isto é, a atualização e fatoração será efetuada de tantos em tantos incrementos de carga. É usual se adotar a atualização da matriz tangente para cada início do incremento de carga (veja fig. III.5).

Quando as iterações são processadas, para os todos os incrementos, com a matriz de rigidez inicial (matriz de rigidez elástica), tem-se uma outra variação do MNR, recebendo outras designações como: método da tensão inicial (BATHE E CIMENTO [20]) ou método das aproximações sucessivas [21] (veja fig. III.6).

Embora essas variações do MNR clássico sejam mais eficientes em termos de esforço computacional envolvido, por outro lado, elas apresentam algumas dificuldades, tais como: convergência lenta e problemas de divergência.

No caso de convergência numérica lenta são usados aceleradores de convergência a fim de tornar tais variações mais eficientes. O acelerador de convergência mais usual é o de AITKEN [20].

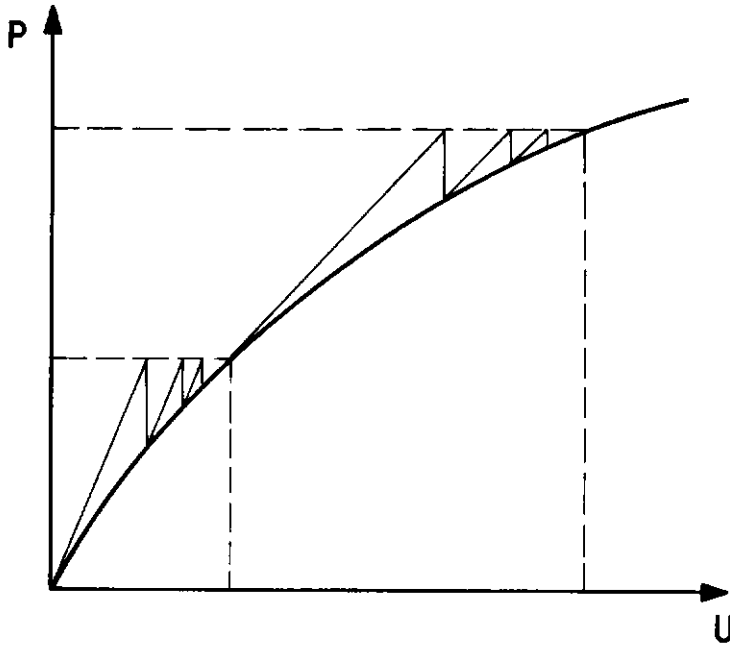


FIG. III.5 - MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO.

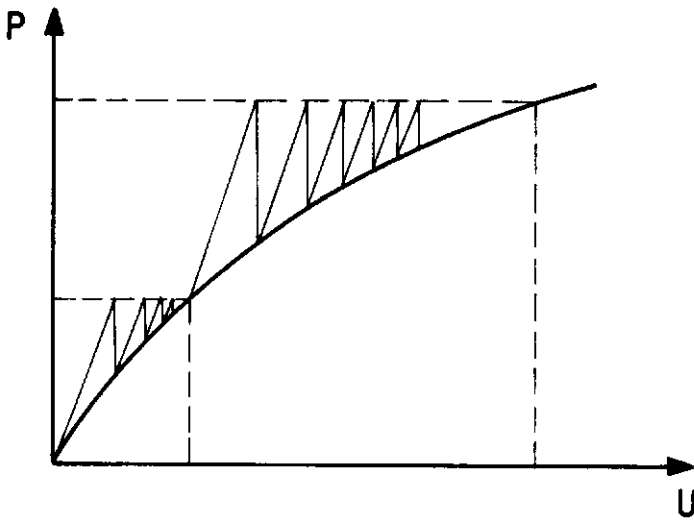


FIG. III.6 - ESQUEMA DO MÉTODO DAS "TENSÕES INICIAIS".

III.2.5 - CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

Uma importante parte do processo iterativo, numa análise não-linear, é aquela que corresponde à parada do processo, estando ligado intimamente com o grau de precisão da resposta final.

Em geral, um dos três critérios de convergência [11] a seguir é usado para verificação da condição de equilíbrio: critério de deslocamentos, critério de forças desequilibradas e critério da energia interna incremental.

1) Critério de Deslocamento

Este critério usa uma norma para deslocamentos

$$\frac{\| \Delta \tilde{U}^i \|}{\| \tilde{U} \|} \leq \text{tolerância} \quad (\text{ III.11 })$$

que pode ser definida por um dos seguintes três tipos: norma absoluta, norma euclidiana e norma máxima [12,25]. A mais usada é a norma euclidiana, a qual é adotada neste trabalho.

A norma euclidiana do vetor \tilde{U} é:

$$\| \tilde{U} \| = \left(\sum_{j=1}^{nd} |\tilde{U}_j|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{ III.12 })$$

onde nd representa, no caso, o número de deslocamentos totais da estrutura.

A equação (III.11) é verificada para cada passo iterativo. $\Delta \underline{U}^i$ é o deslocamento incremental obtido a cada iteração e \underline{U} é o vetor de deslocamentos totais, a cada passo de carga, e é a priori desconhecido. O vetor \underline{U} é aproximado tomando-se o último valor atualizado dos deslocamentos totais dentro de um determinado incremento de carga (veja fig. III.7).

A tolerância adotada varia entre 10^{-6} e 10^{-2} .

2) Critério de Força Desequilibrada:

Este critério se baseia na verificação do vetor de cargas desequilibradas. Uma desvantagem deste método aparece no caso de se ter no vetor de cargas residuais grandezas com unidades diferentes. Por exemplo, para um elemento de viga, as forças nodais internas apresentam valores referentes a forças e momentos.

A expressão para o teste de convergência é:

$$\frac{\| \underline{R} - \underline{F}_{int} \|}{\| \underline{R} \|} \leq \text{tolerância} \quad (\text{III.13})$$

veja figura III.8.

Embora tenha-se implementado estes dois critérios, o de deslocamentos foi o finalmente adotado.

3) Critério de Energia Interna Incremental

Este critério faz uso tanto dos deslocamentos quanto das forças, fornecendo então uma aproximação para estas duas grandezas.

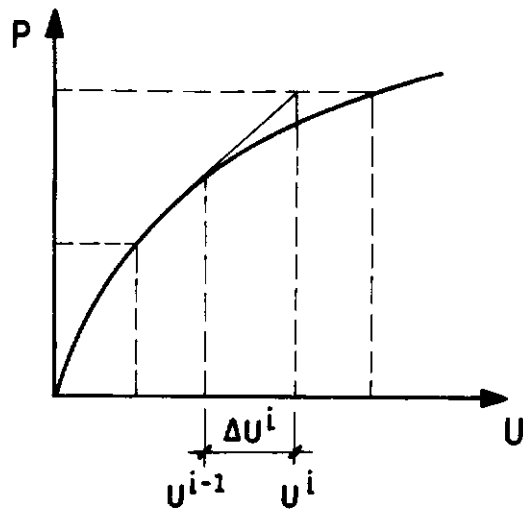


FIG. III.7 - GRÁFICO AUXILIAR PARA CRITÉRIO DE DESLOCAMENTOS.

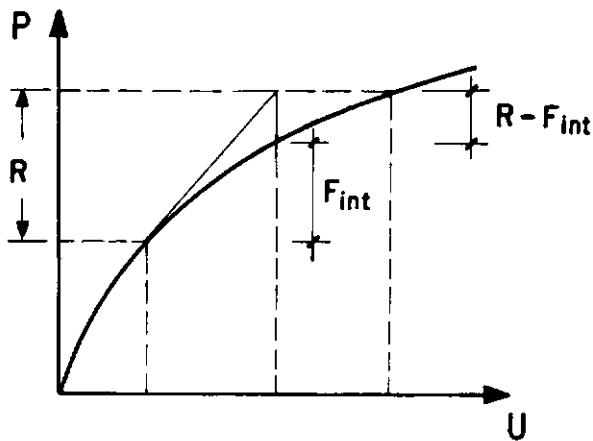


FIG. III.8 - GRÁFICO AUXILIAR PARA CRITÉRIO DE FORÇA DESEQUILIBRADA.

III.3 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA ESTATICO COM NÃO-LINEARIDADE MODERADA

Como foi visto nas seções anteriores, o problema de vibrações de estruturas aporticadas espaciais estaiadas pode ser solucionado procedendo-se inicialmente a uma análise não-linear geométrica, até que o sistema estrutural atinja a configuração de equilíbrio estático não-linear. O objetivo portanto é estabelecer o procedimento numérico e adotá-lo para se alcançar este ponto de equilíbrio estático.

O algoritmo de solução apresentado nesta seção é baseado no processo incremental-iterativo com Newton-Raphson e o problema-objeto é representado pela equação (II.4).

O algoritmo é utilizado para a obtenção da configuração de equilíbrio estático não-linear de estruturas que possam ser discretizadas com elementos de pórtico espacial (viga-coluna) e cabo/treliça.

No caso do problema estudado neste trabalho, existem no MNR algumas nuances que o distingue daquele descrito anteriormente. Isto se deve às tensões (ou forças) iniciais sempre presentes no sistema de cabos. A forma em que se considera o equilíbrio deste estado de tensões iniciais define dois tipos de algoritmos: aquele onde a tensão inicial é equilibrada no 1^o. passo de carga e um outro, cuja tensão inicial é incrementada juntamente com o vetor de cargas externas.

Nas equações de equilíbrio na forma incremental, $\tilde{K}_T \Delta U = \Delta R$, \tilde{K}_T representa a matriz de rigidez tangente total da estrutura.

Para a solução destas equações aplicadas a estruturas aporticadas estaiadas, a matriz tangente total é formada pela contribuição de duas matrizes tangentes: a matriz tangente relativa aos elementos de pórtico espacial e a matriz tangente relativa aos elementos de cabo. Assim,

$$\tilde{K}_T = \tilde{K}_T^{P.E} + \tilde{K}_T^{C.T} \quad (\text{ II.48 })$$

onde,

$$\tilde{K}_T^{P.E} = \tilde{K}_E^{P.E} + \tilde{K}_G^{P.E} \quad (\text{ II.49a })$$

$$\tilde{K}_T^{C.T} = \tilde{K}_E^{C.T} + \tilde{K}_G^{C.T} \quad (\text{ II.49b })$$

onde P.E e C.T indicam respectivamente pórtico espacial e cabo/treliça.

Os elementos da matriz tangente do elemento de cabo/treliça [2,24,26,27] são obtidos aproximando-se o elemento de cabo por elemento de eixo reto de treliça espacial, com três deslocamentos por nó, levando-se em conta a matriz de rigidez geométrica para a correção de geometria e consideração de tensões iniciais. Isto pode ser feito sem perda de resultados efetivos visto que, para esse tipo de estrutura, os cabos estão sob forte força de protensão.

O vetor de deslocamentos incrementais ΔU contém deslocamentos relativos aos elementos de pórtico e de

cabo/treliça.

$\Delta \tilde{R}$ representa o vetor de desequilíbrio nodal, no sistema global, dado pela diferença entre a carga externa aplicada e as forças nodais devidas aos esforços internos resistentes.

Portanto, $\Delta \tilde{R}$ é dado por:

$$\Delta \tilde{R} = \tilde{R} - \tilde{F}_{int} \quad (\text{ III.14 })$$

onde,

\tilde{R} - contém o efeito das forças atuando no sistema
 \tilde{F}_{int} - são as forças nodais, no sistema global, obtidas a partir dos esforços internos resistentes.

O vetor \tilde{R} deve conter todas as forças atuando no sistema. Sendo assim, ver BATHE [11], tem-se:

$$\tilde{R} = \tilde{P} - \tilde{F}_{inc} \quad (\text{ III.15 })$$

onde,

\tilde{P} - é o vetor das cargas externas.
 \tilde{F}_{inc} - é o vetor das forças iniciais obtido a partir das tensões iniciais existentes.

Feitas as identificações dos termos da equação $\tilde{K}_T \Delta \tilde{U} = \Delta \tilde{R}$, passa-se agora à consideração do algoritmo de solução.

III.3.1 - ALGORITMO 1 - FORÇA INICIAL EQUILIBRADA NO 1º.

PASSO DE CARGA

Nesse algoritmo apenas as cargas externas \tilde{P} são aplicadas em incrementos. A figura III.9 ilustra o processo incremental-iterativo, do algoritmo de solução 1, para um grau de liberdade do sistema.

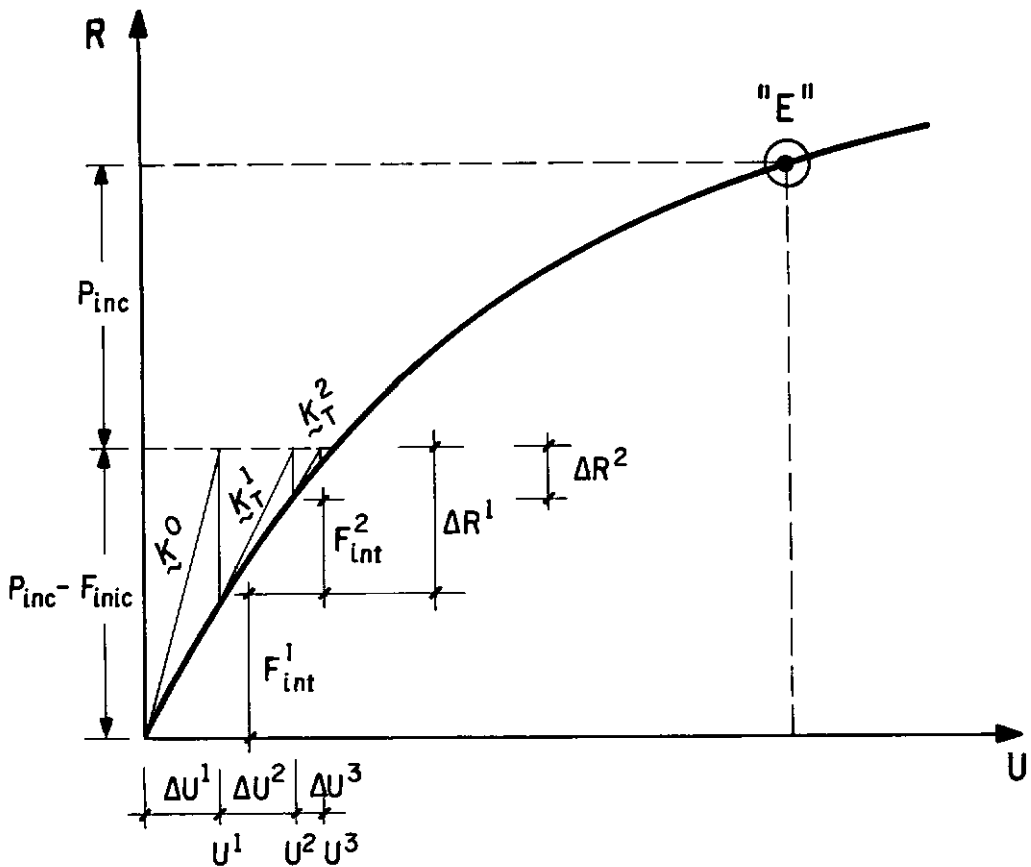


FIG. III.9 - ESQUEMA INCREMENTAL - ITERATIVO DO ALGORITMO 1.

Foi visto na seção III.2.4 que a matriz de partida do processo para realização do 1º. passo iterativo era dada por $\tilde{K}^0 = \tilde{K}_E$. Para o problema de estruturas aporticadas estaiadas, submetidas a tensões iniciais, esta matriz será:

$$\tilde{K}^o = \tilde{K}_E^{P \cdot E} + \tilde{K}_T^{C \cdot T} \quad (\text{ III.16 })$$

onde,

$$\tilde{K}_T^{C \cdot T} = \tilde{K}_E^{C \cdot T} + \tilde{K}_G^{C \cdot T}(\tilde{F}_{\text{inic}}) \quad (\text{ III.17 })$$

já que, como visto na seção II.3.2 do capítulo II, a matriz de rigidez geométrica é função dos esforços internos axiais. Portanto, a matriz de partida para o elemento de cabo/treliça já leva em conta as tensões (ou forças) iniciais existentes no início do processo.

No processo incremental-iterativo, o equilíbrio é alcançado para cada incremento de carga.

Com o auxílio da figura III.9 apresenta-se a seguir o procedimento adotado para implementação computacional do algoritmo de solução 1. O objetivo é atingir, através do processo incremental-iterativo, o ponto "E" da figura III.9, correspondente ao estado de equilíbrio não-linear do sistema.

Algoritmo de Solução 1

As matrizes para início do processo são dadas pelas equações (III.16) e (III.17). Assim, para o 1º. passo iterativo tem-se:

$$\tilde{K}^o \Delta \tilde{U}^1 = \Delta \tilde{R}^o \quad (\text{ III.18 })$$

com

$$\Delta \tilde{R}^o = \tilde{P}_{\text{inc}} - \tilde{F}_{\text{inic}} \quad (\text{ III.19 })$$

onde, \tilde{P}_{inc} é o vetor incremental das cargas externas, obtido dividindo-se o vetor das cargas externas \tilde{P} pelo número de passos de carga que se usará na análise.

O vetor das forças iniciais (\tilde{F}_{inc}), oriundo das tensões iniciais existentes no início do processo, é obtido transformando-se as forças iniciais nos elementos, no sistema local, para o sistema global e efetuando-se um somatório para todos os elementos, correspondente aos seus graus de liberdade.

Resolvendo-se o sistema de equações dado pela equação (III.18) encontram-se os deslocamentos incrementais $\Delta\tilde{U}^1$ (veja fig. III.9). Com estes deslocamentos incrementais calculam-se os deslocamentos atualizados da estrutura

$$\begin{aligned}\tilde{U}^1 &= \tilde{U}^0 + \Delta\tilde{U}^1, & \text{com } \tilde{U}^0 &= 0 \\ \therefore \tilde{U}^1 &= \Delta\tilde{U}^1 & & (\text{ III.20 })\end{aligned}$$

e atualizam-se as coordenadas e, conseqüentemente, a matriz de transformação (ou rotação), já que os seus elementos são dados pelos co-senos diretores, que por sua vez são calculados em função do comprimento do elemento.

A etapa seguinte corresponde ao cálculo do vetor de resíduo das forças (cargas desequilibradas). Para isso, deve-se primeiro atualizar a matriz tangente da estrutura (fig. III.9). A matriz tangente total é função dos esforços internos axiais existentes nos elementos de pórtico e de cabo/treliça.

$$\tilde{K}_{\sim T}^{P.E} = \tilde{K}_{\sim E}^{P.E} + \tilde{K}_{\sim G}^{P.E} (F_{AX}^i) \quad (\text{III.21})$$

$$\tilde{K}_{\sim T}^{C.T} = \tilde{K}_{\sim E}^{C.T} + \tilde{K}_{\sim G}^{C.T} (F_{AX}^i) \quad (\text{III.22})$$

O cálculo dos esforços internos axiais para os elementos é obtido do seguinte modo:

i) Elemento de Pórtico

$$F_{AX}^i = E_{P.E} A_{P.E} (L_1 - L_0) / L_1 \quad (\text{III.23})$$

ii) Elemento de Cabo/Treliça

$$F_{AX}^i = E_{C.T} A_{C.T} (L_1 - L_0) / L_1 + F_{inic} \quad (\text{III.24})$$

Onde,

E, A - representam respectivamente o módulo de elasticidade e a área para cada elemento.

L_0 - o comprimento inicial do elemento (geometria indeformada).

L_1 - o comprimento atual do elemento obtido a partir dos deslocamentos \underline{U}^i .

F_{inic} - é a força inicial nos elementos de cabo/treliça.

Atualizadas as matrizes, pode-se calcular o vetor das forças internas. O vetor das forças internas é obtido a partir das matrizes tangentes dos respectivos elementos. Assim, no vetor de deslocamentos incrementais da estrutura

identificam-se os deslocamentos relativos a cada elemento e calculam-se esses esforços. Vale salientar que as forças internas devem ser calculadas no sistema global; portanto, as matrizes de cada elemento devem ser transformadas para esse sistema.

Feito isso, tem-se, generalizando,

$$\tilde{F}_{int}^i = \sum_1^{nel} \tilde{K}_{ele}^i (\tilde{U}^i) \Delta \tilde{U}_{ele}^i \quad (\text{III.25})$$

Onde,

\tilde{K}_{ele}^i - matriz de rigidez tangente de cada elemento, atualizada, no sistema global.

$\Delta \tilde{U}_{ele}^i$ - deslocamentos nodais incrementais do elemento na iteração i. Este vetor é um subvetor do vetor de deslocamentos nodais incrementais para toda a estrutura ($\Delta \tilde{U}^i$).

Para a 1^a. iteração (vide fig. III.9),

$$\tilde{F}_{int}^1 = \sum_1^{nel} \tilde{K}_{ele}^1 (\tilde{U}^1) \Delta \tilde{U}_{ele}^1 \quad (\text{III.26})$$

O vetor contendo as forças desequilibradas pode ser calculado de duas maneiras:

1) acumulando o vetor das forças internas e calculando a diferença em relação ao vetor de cargas externas aplicadas naquele passo de carga.

2) calculando o resíduo atual em relação ao resíduo anterior.

Assim, pelo gráfico da figura III.9, tem-se:

maneira 1

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{R}^1 &= (\tilde{P}_{inc} - \tilde{F}_{inc}) - \tilde{F}_{int}^1 \\ \Delta \tilde{R}^2 &= (\tilde{P}_{inc} - \tilde{F}_{inc}) - (\tilde{F}_{int}^1 + \tilde{F}_{int}^2) \\ &= \tilde{P}_{inc} - \tilde{F}_{inc} - \tilde{F}_{int}^1 - \tilde{F}_{int}^2\end{aligned}\quad (\text{ III.27 })$$

ou,

maneira 2

$$\Delta \tilde{R}^2 = \Delta \tilde{R}^1 - \tilde{F}_{int}^2 \quad (\text{ III.28 })$$

Implementou-se a maneira 1.

O vetor de desequilíbrio nodal surge porque o estado de deformação (ou de forças internas) da estrutura na 1ª. iteração não corresponde ao carregamento que é aplicado. O processo continuará até que esse resíduo de forças se anule, isto é, até se atingir a configuração de equilíbrio.

O resíduo para proceder à 2ª. iteração é

$$\Delta \tilde{R}^1 = \tilde{P}_{inc} - \tilde{F}_{inc} - \tilde{F}_{int}^1 \quad (\text{ III.29 })$$

Este resíduo é aplicado como carga externa e os novos deslocamentos incrementais são obtidos de

$$\tilde{K}^1(\tilde{U}^1) \Delta \tilde{U}^2 = \Delta R^1 \quad (\text{ III.30 })$$

com os novos deslocamentos em relação à geometria indeformada dados por,

$$\tilde{U}^2 = \tilde{U}^1 + \Delta \tilde{U}^2 \quad (\text{ III.31 })$$

O processo prosseguirá até que o erro, calculado pelo critério de deslocamentos, esteja dentro de uma tolerância pré-estabelecida. A cada passo iterativo é feito o teste de convergência. No caso de convergência para o 1º. passo, aplica-se um novo passo de carga e as informações obtidas no passo de carga anterior são trazidas para este novo passo.

O processo incremental-iterativo para o algoritmo de solução 1 pode ser resumido nos seguintes passos:

- 1) formação do vetor de forças nodais;
- 2) montagem do vetor apontador (perfil) para a estrutura;
- 3) formação do vetor de forças internas, no sistema global, devido às tensões iniciais;

Processo incremental

- 4) $n_{incr} = 1$, n^0 . máximo de incrementos;

Processo iterativo

- 5) $n_{iter} = 1$ n^0 . máximo de iterações;
- 6) atualização das matrizes de rigidez dos elementos (pórtico e cabo/treliça);
- 7) transformação das matrizes de rigidez dos elementos do

sistema local para o global para formar a matriz de rigidez global da estrutura;

8) triangularização do sistema de equações;

9) resolução do sistema de equações - $\underline{K}_T \Delta \underline{U} = \Delta \underline{R}$ - em $\Delta \underline{U}$;

10) atualização do vetor de deslocamentos

$$\underline{U}^i = \underline{U}^{i-1} + \Delta \underline{U}^i$$

11) atualização das coordenadas;

12) cálculo da norma dos deslocamentos para teste de convergência

$$\text{Erro} = \left\| \frac{\sqrt{\Delta \underline{U}^2}}{\sqrt{\underline{U}^2}} \right\| \quad (\text{II.32})$$

13) cálculo do vetor desequilíbrio nodal - $\Delta \underline{R}$

se for o 1º. passo de carga..... $\Delta \underline{R} = (\underline{R} - \underline{F}_{\text{inic}}) - \underline{F}_{\text{int}}$

se o nº. de passos > 1..... $\Delta \underline{R} = \underline{R} - \underline{F}_{\text{int}}$

14) repetir os passos de 5-13 até que a convergência seja verificada (erro \leq tolerância);

15) cálculo dos esforços internos totais pela soma dos incrementos dos esforços;

16) imprimir deslocamentos e esforços para o passo de carga atual;

17) retornar ao passo 4 para o próximo incremento de carga.

III.3.2 - ALGORITMO 2 - FORÇA INICIAL INCREMENTADA

Não existem grandes diferenças entre este algoritmo e o algoritmo 1. A diferença básica está na consideração, dentro do processo, da tensão inicial nos elementos de

cabo/treliça. Para este novo algoritmo, a tensão inicial (ou força inicial) é incrementada juntamente com a carga externa atuante. Em termos de processamento numérico, os resultados da análise de um problema empregando um ou outro algoritmo tendem aproximadamente aos mesmos valores. Deve-se ressaltar entretanto que as histórias ou caminhos de equilíbrio ao longo do processo são em geral distintos, dependendo da ordem de grandeza da diferença entre valores das forças iniciais nos cabos e da carga externa. Em termos de comportamento estrutural, o algoritmo 1 é mais representativo visto que as tensões iniciais são valores existentes já no início do processo; por outro lado, o algoritmo 2 pode ser empregado no caso de se desejar estabelecer um programa de aplicação de protensão ao longo da fase de construção a fim de verificar o comportamento da estrutura.

Os exemplos de aplicação (capítulo V) elucidarão os problemas inerentes a um e outro algoritmo. No caso de pontes estaiadas, onde as forças iniciais nos elementos de cabo/treliça são bem superiores às resultantes das cargas por unidade de comprimento aplicadas ao longo do tabuleiro, o desempenho do algoritmo 2 é melhor que o do 1, inclusive em termos de resultados finais.

Uma diferença entre os dois algoritmos, em termos de caminho de equilíbrio percorrido, pode ser vista no exemplo da malha de cabos poligonais analisado no capítulo V.

Independentemente do algoritmo utilizado, surgem problemas de estabilidade numérica quando a carga externa induz "forças de compressão" nos elementos de cabo que

superam a tração inicial existente nos mesmos. Este fato corresponde ao afrouxamento do cabo, indicando que aquele cabo não está mais em operação, isto é, não oferece mais resistência estrutural. Este problema aparece no exemplo da torre estaiada analisada no capítulo V. Algumas tentativas foram testadas com o objetivo de superar o problema, como por exemplo, colocar rigidez nula nos cabos frouxos. Este procedimento, contudo, não foi eficiente; produzia-se com isto uma desestabilização completa do algoritmo e divergência no processo. Essas tentativas só foram feitas com o intuito de não parar o processo computacional, ou seja, tornar o procedimento automático. Um procedimento que pode ser adotado, embora não seja automático, é a identificação dos cabos frouxos e reinício do processo sem estes cabos, guardando para os demais cabos os níveis de tração daquele momento de instabilidade numérica. Estes problemas serão ainda discutidos e esclarecidos na apresentação do elemento de cabo/treliça (capítulo IV) e na sua aplicação a exemplos (capítulo V).

Para o desenvolvimento do processo incremental - iterativo empregando o algoritmo 2, apresenta-se somente as partes que são diferentes daquelas mostradas no algoritmo 1. A figura III.10, para um grau de liberdade da estrutura, ilustra o procedimento adotado.

Como pode ser visto no gráfico da figura III.10, o vetor de cargas \underline{R} , contendo o efeito das cargas sobre o sistema, é agora incrementado igualmente. Assim, tanto o vetor das cargas externas \underline{P} quanto às tensões iniciais são

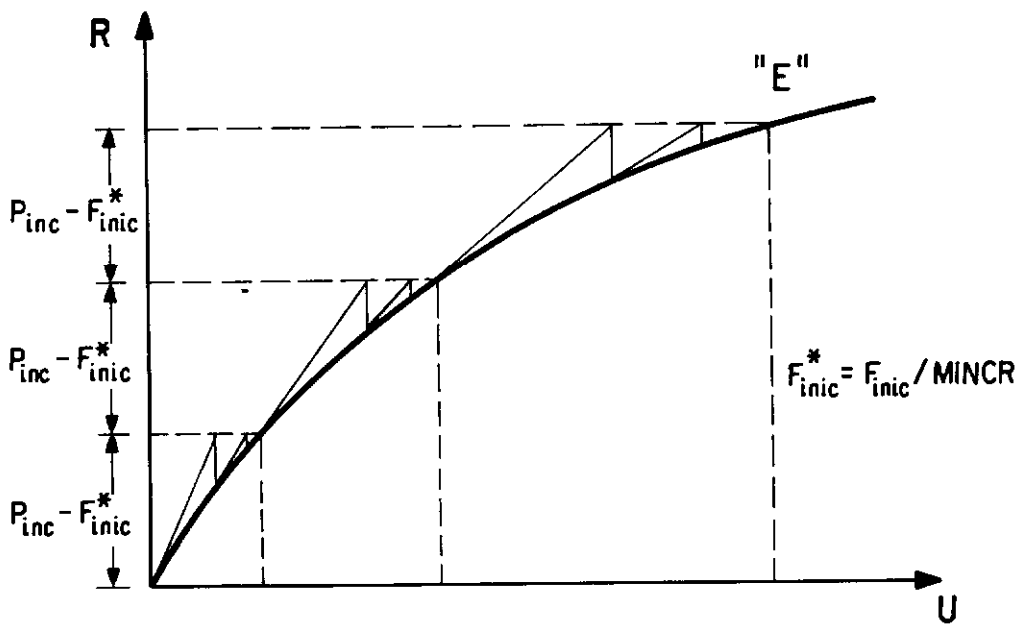


FIG. III.10 - ESQUEMA INCREMENTAL - ITERATIVO DO ALGORITMO 2.

incrementados com o mesmo número de passos de carga. A diferença básica, como já comentado, ocorrendo no cálculo do resíduo das forças, o qual leva em conta a tensão inicial na verificação do equilíbrio, para todos os passos. Portanto, a tensão inicial total só será equilibrada no final do processo.

Cálculo do Vetor de Desequilíbrio Nodal

$$\Delta \tilde{R} = \tilde{R} - \tilde{F}_{int} ; \quad \text{com} \quad \tilde{R} = \tilde{P} - \tilde{F}_{inic}.$$

O vetor \tilde{R} será agora incrementado integralmente

$$\tilde{R}_{inc} = (\tilde{P} - \tilde{F}_{inic}) / Mincr \quad (\text{III.33})$$

onde $Mincr$ é igual ao número de passos de carga em que se divide a carga \tilde{R} .

Logo, para cada passo iterativo

$$\Delta \tilde{R} = (\tilde{P} - \tilde{F}_{inc}) / M_{incr} - \tilde{F}_{int} \quad (\text{III.34})$$

com o vetor \tilde{F}_{int} sendo calculado da mesma maneira como no algoritmo 1.

O Algoritmo 2 fica reduzido a:

- 1) formação do vetor de forças nodais (\tilde{P});
- 2) montagem do vetor apontador (perfil) para a estrutura;
- 3) formação do vetor de forças internas, no sistema global, devido às tensões iniciais;
- 3.1) cálculo do vetor $\tilde{R} = \tilde{P} - \tilde{F}_{int}$;
- 4) repetir passos 4-17 do algoritmo 1, sendo o passo 13 como explicado nesta seção.

III.4 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALOR PARA VIBRAÇÕES SOB TENSÕES INICIAIS

Após encontrada a configuração de equilíbrio estático não-linear através de um dos algoritmos anteriores - e para estruturas submetidas às condições discutidas no capítulo II - tem-se como objetivo a investigação de "pequenos" movimentos vibratórios em torno desta configuração deformada de equilíbrio estático.

Viu-se no capítulo II que a equação para determinação das frequências e modos de vibração da estrutura é dada por

$$[(\underline{K}_E + \lambda \underline{\bar{K}}_G) - \omega^2 \underline{M}] = 0 \quad (\text{II.51})$$

Como a estrutura estaiada é composta por dois elementos distintos, elemento de pórtico e cabo/treliça, antes de apresentar o procedimento computacional para determinação das freqüências e modos de vibração da estrutura como um todo, discute-se algumas características dos elementos separadamente. No capítulo de aplicação testam-se exemplos para todo o processo de resolução representado pela equação (II.51).

Para o elemento de pórtico numa estrutura estaiada, o comportamento não-linear se caracteriza, geralmente, pela perda de rigidez. As freqüências naturais de vibração obtidas serão portanto menores que aquelas calculadas para a estrutura na configuração indeformada. O comportamento não-linear para este elemento é representado no gráfico da figura III.11.

O comportamento não-linear para o elemento de cabo é, por outro lado, caracterizado pelo ganho de rigidez. Assim, as freqüências naturais de vibração para a geometria deformada serão maiores que para a configuração indeformada. O gráfico para a relação carga x deslocamento do cabo é dado na figura III.12.

O caminho não-linear descrito para a estrutura funcionando como um todo é ditado pela maior rigidez de seus elementos componentes. Para a ponte estaiada, a maior rigidez do sistema de cabos faz com que as freqüências para a configuração deformada sejam maiores que na indeformada.

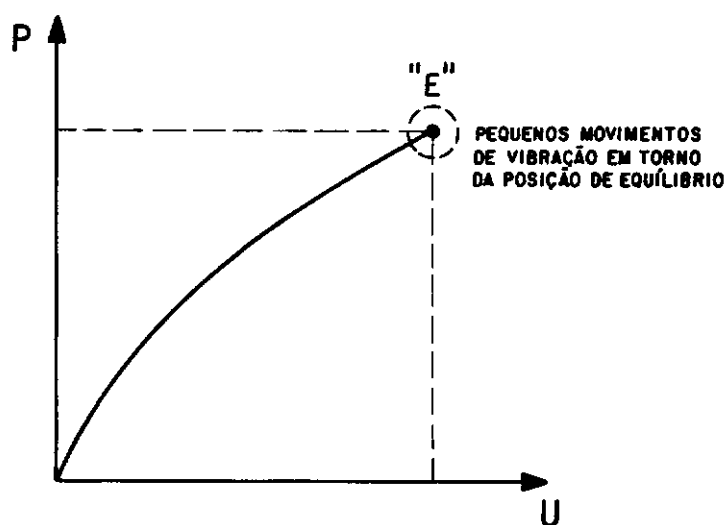


FIG. III.11 - COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR PARA O ELEMENTO DE PÓRTICO.

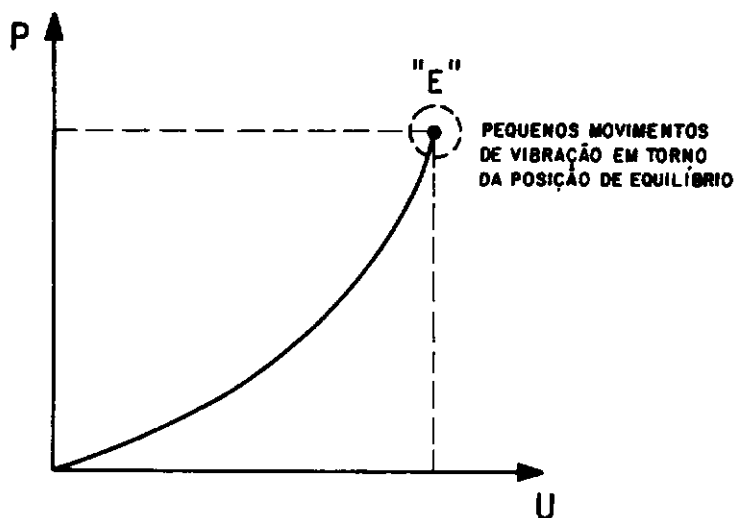


FIG. III.12 - COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR PARA O ELEMENTO DE CABO.

Retomando a equação (II.51), as tensões iniciais (λ_1) para o problema de vibrações sob tensões iniciais serão as tensões finais obtidas na análise não-linear estática, empregando-se um dos algoritmos descritos na seção III.3.

O algoritmo para resolução da equação (II.51) pode ser resumido nos seguintes passos:

- 1) passos de 1-17 de um dos algoritmos dados na seção III.3;
- 2) reavaliação da matriz de rigidez tangente global da estrutura, tomando-se os esforços finais da análise não-linear como valores de tensões (forças) iniciais e montagem da matriz de massa; ambas com contribuições de coeficientes dos elementos de pórtico e cabo/treliça;
- 3) introdução das condições de contorno na matriz de rigidez tangente;
- 4) triangularização da matriz tangente;
- 5) obtenção das frequências e configuração dos modos de vibração através do método de iteração por subespaços.

III.5 - CARGAS CRÍTICAS COM CRITÉRIO $\omega^2 = 0$

(caso particular)

Este critério para determinação da carga crítica surge como um caso particular da equação (II.51), aplicada a uma estrutura estaiada, quando o carregamento e tração nos cabos atuam no sentido de diminuir a rigidez da estrutura aporticada.

Aqui o interesse é voltado para a determinação do valor

crítico do carregamento atuante a partir do qual, para qualquer incremento no valor deste carregamento, a estrutura perde estabilidade.

Os passos a serem seguidos para a determinação do valor crítico do carregamento, são:

1) dada uma determinada estrutura estaiada, para a qual se deseja encontrar o valor crítico do carregamento (protensão nos cabos, carregamento externo ou ambos), é realizada uma análise não-linear estática. Os esforços internos axiais resultantes de um passo de carga (utilizando-se um dos dois algoritmos que seja mais adequado ao problema) serão tomados como os esforços iniciais para o problema de vibração "livre" sob tensões iniciais.

2) com esses esforços internos axiais obtidos no final do processo iterativo para um passo de carga, remonta-se a matriz de rigidez tangente, chegando-se ao problema de autovalor

$$\tilde{K}_T \tilde{\Phi} = \alpha \tilde{M} \tilde{\Phi} \quad (\text{III.35})$$

onde \tilde{K}_T é a matriz atualizada resultante da soma da parte elástica mais a geométrica, o parâmetro α corresponde às frequências circulares ao quadrado e $\tilde{\Phi}$ são os modos de vibração associados, correspondentes à configuração deformada cuja estabilidade se quer examinar;

3) através do método de iteração por subespaços são computados os valores das frequências e respectivos modos de vibração correspondentes ao carregamento aplicado;

4) os passos de 1-3 são repetidos para um outro passo de carga, encontrando-se para este novo nível de carregamento o valor da frequência natural (ω^2). O processo não-linear é repetido até que $\omega^2 \rightarrow 0$ para um certo nível do carregamento, denominado crítico.

Deve-se observar finalmente que quando uma estrutura estaiada tem comportamento fracamente não-linear ou "quase-linear", a determinação do carregamento crítico pode ser feito, com boa aproximação, através da equação (II.51) e na forma descrita na seção II.5.

CAPÍTULO IV

O PROGRAMA VIBRES

IV.1 - INTRODUÇÃO

Para estruturas de grande porte, a parte referente à obtenção de resultados corresponde sempre ao desenvolvimento de um sistema computacional. A implementação do sistema está intimamente ligada aos métodos numéricos utilizados para solucionar as equações resultantes da modelagem matemática, a qual por sua vez, é dependente das hipóteses simplificadoras adotadas. Pode-se dizer que a parte de implementação numérica corresponde à fase de comprovação e eficiência tanto do modelo matemático quanto dos algoritmos numéricos utilizados na solução das equações.

Esta fase de implementação computacional além de ser laboriosa é também muito importante, pois através de testes e exemplos típicos de certas classes de problemas é que se compreende as vantagens e limitações da formulação utilizada.

O que se apresenta a seguir são os módulos mais importantes do programa desenvolvido, que fornece as características dinâmicas do sistema estrutural para vibrações em torno de uma posição de equilíbrio estático não-linear.

Um fluxograma geral para os diversos módulos que compõem o programa, onde cada módulo executa tarefas específicas, é apresentado. Para cada módulo se faz uma

descrição em termos de técnicas adotadas e suas principais características.

IV.2 - DESCRIÇÃO GERAL DA ESTRUTURA DO PROGRAMA

O programa VIBRES - Vibrações de Estruturas Aporticadas Espaciais Estaiadas - implementado no computador Burroughs do NCE da UFRJ teve como ponto de partida o programa DINESP [28] - Análise Dinâmica de Estruturas Reticuladas Espaciais - na versão originalmente apresentada por MAGLUTA [29]. Nessas últimas versões, o programa soluciona apenas o problema dinâmico linearizado, isto é, o problema de vibração livre dado pela equação (II.7), aplicado a estruturas de grande porte. O programa faz uso de técnicas de programação e de otimização da memória central do computador, que o torna bastante eficiente. Acresça-se a estas características a estruturação adotada, a qual facilita a implementação de outras rotinas ou módulos de execução. Pode-se dizer, então, que o programa VIBRES corresponde ao acoplamento da análise não-linear estática à análise de vibrações livres, com algumas modificações do programa DINESP original.

Com o intuito de proporcionar uma visão geral das análises envolvidas no programa VIBRES, mostra-se na figura IV.1a a decomposição do mesmo em dois blocos. O bloco 1 contém as equações de equilíbrio na forma incremental e o bloco 2 a equação (II.46), referentes, respectivamente, à análise estática não-linear geométrica e à análise de vibrações "livres" em torno da configuração deformada de

equilíbrio estático não-linear. Em termos de algoritmo de solução, o bloco 2 representa, com algumas alterações, o que foi utilizado do sistema DINESP original.

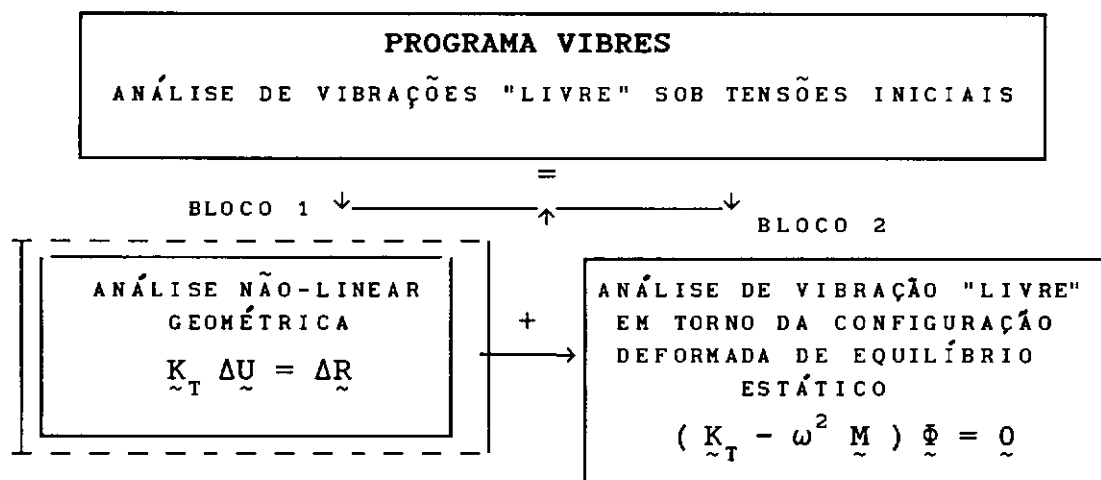


FIGURA IV.1a - Bloco Esquemático do Programa VIBRES

Como citado acima, a estruturação do bloco 2 corresponde, com pequenas alterações, à estruturação original do sistema DINESP. Resta, portanto, o bloco 1 como aquele relativo às implementações realizadas neste trabalho, juntamente com as alterações realizadas no bloco 2. As implementações executadas serão completamente esclarecidas na seção IV.3.

Vê-se também na figura IV.1a que com endereçamentos adequados pode-se, sem se alterar a estrutura básica do programa, proceder a diferentes análises, tais como: análise linear estática de estruturas reticuladas espaciais; análise não-linear estática de estruturas reticuladas / aporticadas estaiadas; análise de vibrações livres de estruturas reticuladas, etc.

A estruturação modular [11,15,30] geral do programa VIBRES pode ser vista na figura IV.1b.

1) MÓDULO I

Na fase inicial são dimensionados os vetores de trabalho que contêm as principais variáveis utilizadas no programa. Tem-se um vetor de trabalho para alocar as variáveis inteiras e outro para as variáveis reais. Nesse módulo é definido o número máximo de posições num vetor que serão ocupadas por cada um dos blocos que representam as partições da matriz de rigidez, armazenada em perfil segundo alturas efetivas das suas colunas.

A alocação dinâmica das variáveis nos vetores de trabalho permite uma otimização da memória central do computador através do ajuste do dimensionamento das variáveis dentro desse vetor, cujos endereços são identificados por meio de apontadores. Esses apontadores são definidos em função dos parâmetros do sistema estrutural em questão, ficando, portanto, o dimensionamento das variáveis de acordo com o problema particular que se quer analisar. Esta técnica permite ainda que sejam liberadas áreas da memória central do computador referentes a determinadas variáveis que não são utilizadas numa subrotina.

2) MÓDULO II

Este módulo consiste da leitura e impressão dos seguintes dados:

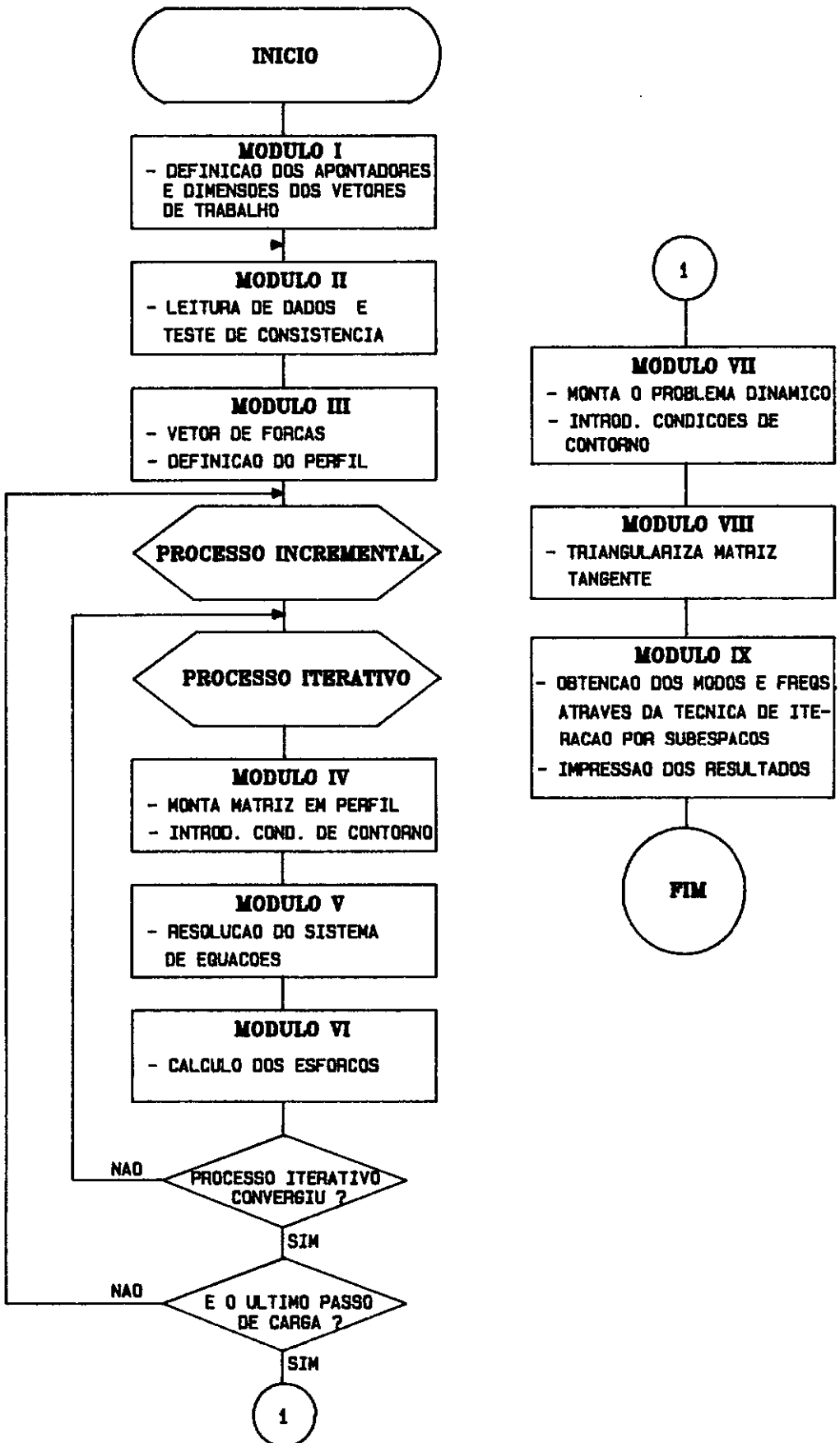


FIG.IV.1.b. FLUXOGRAMA DA ESTRUTURACAO MODULAR DO PROGRAMA VIBRES

- a) identificação da estrutura (título);
- b) características topológicas (coordenadas nodais, incidência);
- c) características geométricas (área, momento de inércia, etc);
- d) características dos materiais (módulo de elasticidade, densidade, etc);
- e) características dos apoios (apoio rígido, apoio elástico).

Um teste de consistência é realizado a fim de se detectar possíveis erros na massa de dados, evitando que o programa seja executado. Constatado o erro, é impresso um relatório com o qual se pode identificar a linha incorreta do arquivo de entrada. Todos os dados de entrada são fornecidos em formato livre.

3) MÓDULO III

Neste nível do programa é montada a tabela descritiva da topologia do particionamento do perfil em blocos [30] e o vetor apontador em relação ao perfil total da estrutura. Este vetor aponta a posição dos elementos da diagonal principal da matriz armazenada em perfil por altura efetiva de coluna, como ilustrado na figura IV.2.

A tabela descritiva fornece sequencialmente na i -ésima linha as seguintes informações para um certo bloco:

- i) n° . da 1^a. coluna do bloco;
- ii) n° . da última coluna do bloco;
- iii) posição do primeiro coeficiente do bloco relativo ao

armazenamento em forma completa e unidimensional.

O vetor de forças, independente da matriz ser particionada ou não, encontra-se montado de forma completa na memória central.

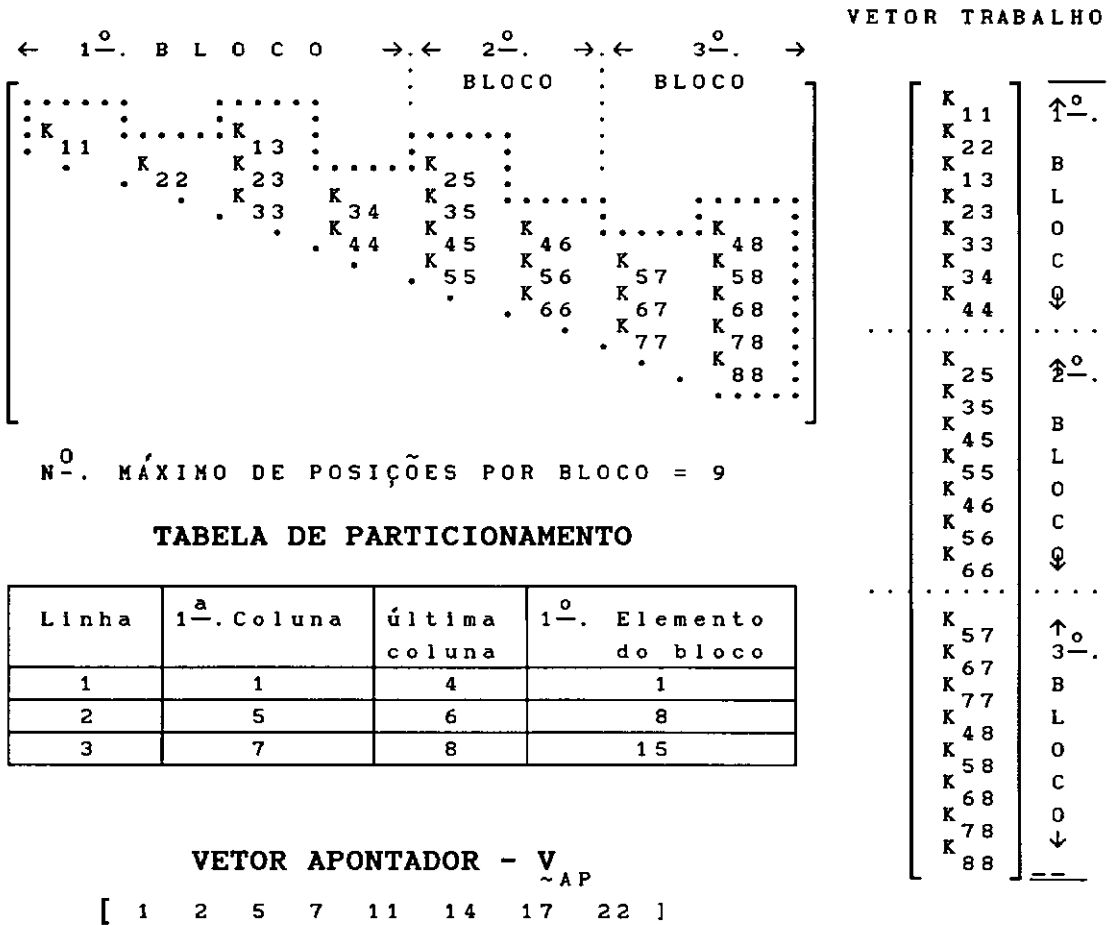


Figura IV.2 - Quadro referente à topologia da matriz armazenada em perfil, particionada em blocos

A fórmula para se acessar a posição de um determinado elemento no vetor trabalho bloqueado é dado por

$$L_1 = 1 - \text{Mblocos}(\text{IB}, 3) + 1$$

$$l = V_{\sim AP}(j) + i - j$$

onde l indica a posição dos coeficientes da matriz, em relação ao armazenamento completo do perfil; i o n° . da linha; j o n° . da coluna; M_{bloco} a matriz de topologia do particionamento e IB a ordem do bloco.

4) MÓDULO IV

Iniciado o processo incremental, com a aplicação do incremento de carga, entra-se no processo iterativo com os módulos de números quatro a seis sendo processados até que a convergência seja verificada.

A montagem da matriz tangente global é feita a partir das matrizes tangentes dos elementos - cabo/treliça e pórtico. Esta matriz é armazenada num vetor de trabalho unidimensional, cujas características de esparsidade e simetria da matriz são aproveitadas. Na técnica de armazenamento (veja fig. IV.2), os elementos, a partir do 1° . elemento não nulo do topo da coluna até a diagonal principal, são colocados no vetor de trabalho. O particionamento da matriz global é definido em função do porte do sistema estrutural e da capacidade de memória central do computador.

As condições de contorno, através da técnica do "número grande" [30], são introduzidas conjuntamente com a montagem de cada bloco, ou seja, uma vez montado o bloco introduz-se as condições de contorno. Assim, ao término da montagem de todos os blocos se tem automaticamente as condições de contorno introduzidas. Percebe-se que se retém em memória central apenas um bloco de cada vez. O procedimento adotado

para montagem dos blocos pode ser descrito como se segue.

Dentro de um laço mais externo, onde se faz a variação de 1 até o número máximo de blocos, tem-se um laço interno que varre todos os elementos, ou seja, através da identificação da ordem do grau de liberdade do elemento, em relação à numeração dos deslocamentos com referência ao sistema global, verifica-se se este elemento contribui no bloco. Em caso positivo, os coeficientes da matriz de rigidez deste elemento são calculados e distribuídos neste bloco; em caso contrário, busca-se um novo elemento e faz-se uma nova verificação. O procedimento é ilustrado através do seguinte algoritmo:

- 1 - faça IB = 1, n^o. de blocos
- 2 - chama subrotina que monta a matriz de rigidez
 - 2.1 - faça j = 1, n^o. de elementos
 - 2.2 - pesquisa da ordem do grau de liberdade do elemento em relação ao sistema global
 - 2.3 - elemento de ordem j contribui no bloco IB ?
 - se verdadeiro → monta matriz do elemento
 - se falso → volta ao passo 2.1
- 3 - introduza condições de contorno
- 4 - continue

5) MÓDULO V

A parte de resolução do sistema de equações demanda o maior percentual de tempo envolvido na análise . O método de Cholesky operando segundo as colunas, da matriz armazenada

em perfil, constitui-se num procedimento eficiente. Este método é aplicado para matrizes positivas definidas e consiste em se decompor a matriz da estrutura numa triangular inferior e outra superior. Os passos a seguir resumem a aplicação do método de Cholesky.

Dado o sistema de equações

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{R}} \quad (\text{IV.1})$$

com a matriz $\underline{\underline{K}}$ armazenada como descrito anteriormente, decompõe-se a mesma da seguinte maneira:

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{L}}^t \underline{\underline{L}} \quad (\text{IV.2})$$

sendo $\underline{\underline{L}}$ uma matriz triangular superior.

Levando (IV.2) em (IV.1), tem-se:

$$\underline{\underline{L}}^t \underline{\underline{L}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{R}} \quad (\text{IV.3})$$

fazendo $\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{U}}$, o sistema (IV.3) fica:

$$\underline{\underline{L}}^t \underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{R}} \quad (\text{IV.4})$$

Com isto, pode-se apresentar as etapas básicas do método de Cholesky:

1º.) obtenção da matriz triangular $\underline{\underline{L}}$, correspondendo à fase de decomposição ou triangularização da matriz do sistema. A matriz $\underline{\underline{L}}$ é também conhecida como fator de Cholesky;

2º.) resolução do sistema (IV.4), cuja matriz $\underline{\underline{L}}^t$ é triangular inferior, através de um processo de substituição, já que se tem:

$$\downarrow \left[\begin{array}{cccccccc} l_{11} & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & l_{nn} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} R_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_n \end{array} \right] \quad (\text{ IV.5 })$$

3^o.) resolução do sistema (IV.3) em \underline{U} , através do processo de retrossubstituição.

$$\uparrow \left[\begin{array}{cccccccc} l_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & l_{1n} \\ & \cdot & & & & & & \cdot \\ & & \cdot & & & & & \cdot \\ & & & \cdot & & & & \cdot \\ & & & & \cdot & & & \cdot \\ & & & & & \cdot & & \cdot \\ & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & l_{nn} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{array} \right] \quad (\text{ IV.6 })$$

O procedimento, em termos de algoritmo, tal como está implementado neste trabalho é apresentado em [30].

6) MÓDULO VI

Com os deslocamentos obtidos no módulo anterior, calculam-se os esforços a partir das matrizes "tangentes" de cada elemento, tal como explicado na seção III.3.

7) MÓDULO VII

Uma vez atingida a convergência para o último passo de carga, procede-se à montagem das matrizes de rigidez "tangente" para os elementos de pórtico e cabo/treliça. A matriz de massa para os elementos pode ser do tipo

consistente ou diagonal. Neste nível, a matriz tangente é reavaliada com os esforços axiais obtidos no final do processo incremental-iterativo.

Este módulo corresponde à implementação da equação (II.19), onde as condições de contorno são introduzidas somente na matriz tangente. A matriz de massa global encontra-se armazenada num outro vetor de trabalho, do mesmo modo que a matriz de rigidez.

8) MÓDULO VIII

Nesta fase do programa a matriz de rigidez tangente é apenas triangularizada, sendo preparada para se iniciar, no módulo seguinte, a obtenção das características dinâmicas da estrutura em torno de uma configuração de equilíbrio estático não-linear.

9) MÓDULO IX

A técnica adotada para se calcular as freqüências e os modos de vibração é a de iteração por subespaços e é baseado no método desenvolvido por BATHE [11].

O método de iteração por subespaços consiste num processo iterativo, onde se busca um subespaço vetorial de dimensão m , que contenha boas aproximações dos autovalores e autovetores de interesse, do espaço vetorial de dimensão n , solução do problema. A dimensão deste subespaço m é fixada tomando-se o menor valor entre $2p$ e $p+8$, sendo p o número de freqüências e modos de vibração requeridos. Este método

determina, portanto, os p primeiros autovalores e autovetores, de modo a satisfazer aproximadamente a equação (II.46).

IV.3 - IMPLEMENTAÇÕES E ALTERAÇÕES REALIZADAS NO DINESP

Conforme visto na seção IV.2, a resolução do problema estático não-linear geométrico para estruturas aporticadas estaiadas corresponde basicamente à implementação computacional realizada nesse trabalho. Antes porém de se implementar as rotinas necessárias para resolver este problema, passou-se por etapas intermediárias já que o programa original DINESP foi desenvolvido apenas para cálculo das frequências e modos naturais de vibração de pórticos espaciais. Essas etapas intermediárias são apresentadas a seguir:

1) a primeira teve como objetivo a implementação de rotinas para resolver o problema estático linear para estruturas reticuladas espaciais. Paralelamente, implementou-se a matriz de rigidez geométrica para pórtico espacial, possibilitando a aplicação do critério de frequência nula ($\omega^2 = 0$) para cálculo de cargas críticas de pórticos espaciais, como mostrado no capítulo II;

2) na segunda dessas etapas, implementaram-se as matrizes de rigidez elástica, geométrica e de massa (consistente e diagonal) para o elemento de cabo/treliça submetido a tensão inicial de tração;

3) na terceira dessas etapas foi implementado um algoritmo incremental-iterativo com esquema Newton-Raphson para a solução do problema estático não-linear geométrico de estruturas aporticadas espaciais estaiadas como descrito no capítulo III.

Cumpridas todas essas etapas pode-se, finalmente, resolver o problema de vibrações sob tensões iniciais, aproveitando-se o módulo DINESP para solução do problema de autovalor resultante.

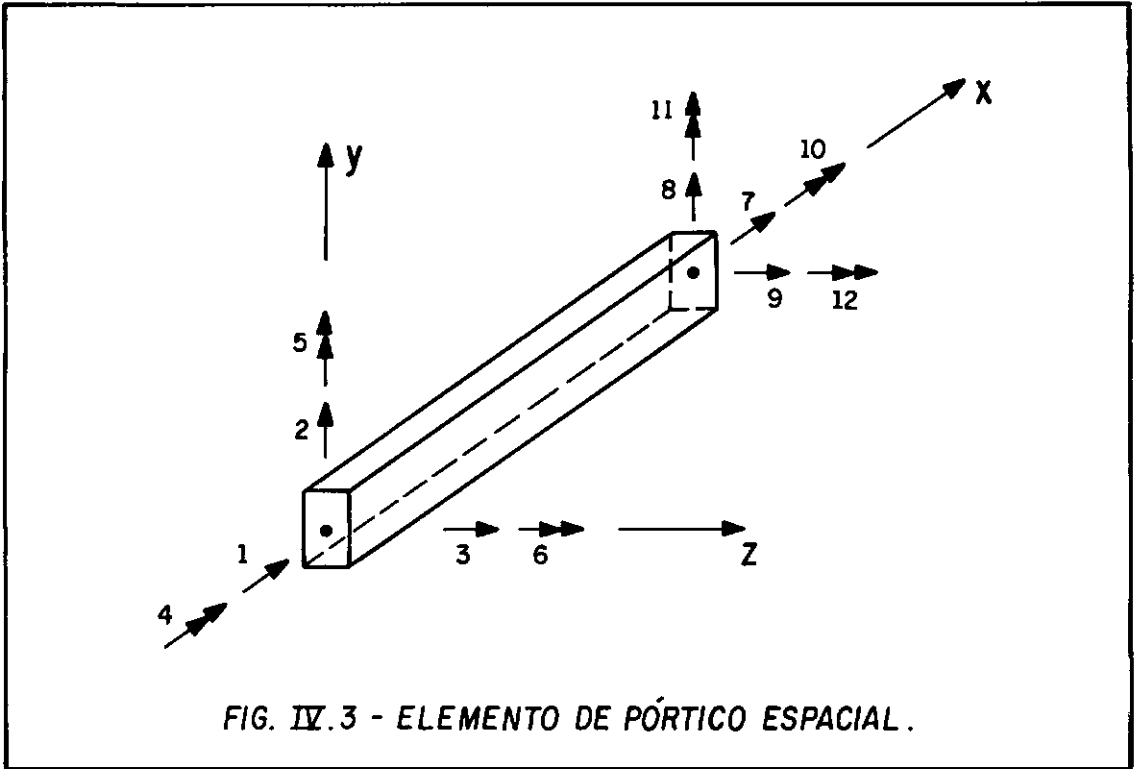
IV.4 - ELEMENTOS UTILIZADOS

IV.4.1 - ELEMENTO DE PÓRTICO ESPACIAL

O tipo de não-linearidade no elemento de pórtico surge devido à interação axial-flexão sempre presente nas estruturas estaiadas analisadas neste trabalho. Nestas estruturas o grau de não-linearidade é de fraco a moderado, podendo-se representar a matriz tangente por uma aproximação não-linear de primeira ordem, dada pela matriz de rigidez geométrica.

O elemento de pórtico espacial com dois nós e seis graus de liberdade por nó produz uma matriz de rigidez no sistema local de dimensão 12×12 , envolvendo esforço axial, esforços cortantes, momentos fletores e torção. A figura IV.3 apresenta um elemento típico onde são mostrados o sistema de referência local e os 6 graus de liberdade (3

deslocamentos + 3 rotações) por nó, aos quais correspondem respectivamente a força axial, duas forças cortantes e 3 momentos fletores.



A matriz de rigidez tangente do elemento de pórtico ($\tilde{K}_T^{P.E}$) no sistema local é dada por:

$$\tilde{K}_T^{P.E} = \tilde{K}_E^{P.E} + \tilde{K}_G^{P.E} \quad (IV.7)$$

onde $\tilde{K}_E^{P.E}$ é a matriz elástica linear e $\tilde{K}_G^{P.E}$ é a matriz de rigidez geométrica.

A matriz do elemento no sistema local é transformada para o sistema global, para ter seus coeficientes distribuídos na matriz global do sistema, através da matriz de rotação (ou transformação) \tilde{T}_T de dimensão 12x12.

Por uma questão de completeza são apresentadas essas matrizes no apêndice A.

A matriz de rigidez do elemento no sistema de eixo global é calculada por:

$${}^G \tilde{K}_T^{P.E} = \tilde{T}_T^t \tilde{K}_T^{P.E} \tilde{T}_T^t \quad (IV.8)$$

onde o superíndice g se refere ao sistema de eixo global e o t à transposta de uma matriz.

A convenção de sinais adotada para deslocamentos e forças no elemento é estabelecida em função dos sentidos positivos dos graus de liberdade (deslocamentos e rotações), cujas direções são definidas na figura IV.3; isto é, são positivas quando os sentidos das grandezas vetoriais calculadas (deslocamentos, forças, rotações ou momentos) no sistema local coincidem com os sentidos positivos dos graus de liberdade e, em caso contrário, negativas.

Todas as transformações aplicadas à matriz de rigidez são usadas para a formação da matriz de massa no sistema global de referência.

IV.4.2 - ELEMENTO DE CABO/TRELIÇA

Antes da apresentação das matrizes adotadas neste trabalho para a modelagem discreta de um cabo com rigidez à flexão desprezível, faz-se aqui alguns comentários sobre as aproximações adotadas em alguns trabalhos publicados na literatura.

Sabe-se que um cabo submetido ao seu peso próprio

assume a forma de catenária. Contudo, por razões de simplicidade, quando o cabo é um estai pretensionado, exibindo pequenas flechas, é comum se adotar para a configuração deformada dos cabos sob a ação de peso próprio a forma parabólica. Esta, entretanto, é a forma assumida por um cabo sob a ação de um carregamento uniformemente distribuído.

Os resultados obtidos sob esta aproximação parabólica não diferem significativamente daqueles associados à forma catenária, desde que o cabo seja um estai bastante protendido.

A não-linearidade de comportamento do cabo é devida à mudança de geometria sob ação crescente do carregamento e ao efeito de segunda ordem produzido pela tensão atuante ao longo do cabo. Verifica-se, portanto, um aumento de comprimento do cabo devido ao estiramento elástico (como no caso de uma barra reta) e à mudança de geometria decorrente da alteração na flecha. Assim, a deformação efetiva do cabo é maior do que a deformação elástica calculada para uma mesma protensão no cabo na sua configuração retilínea original, isto é, sem considerar mudança de configuração geométrica.

Existem na literatura dois tipos de procedimentos que são mais usuais para modelagem discreta levando em consideração a não-linearidade geométrica do cabo estai [1,2,31-34]:

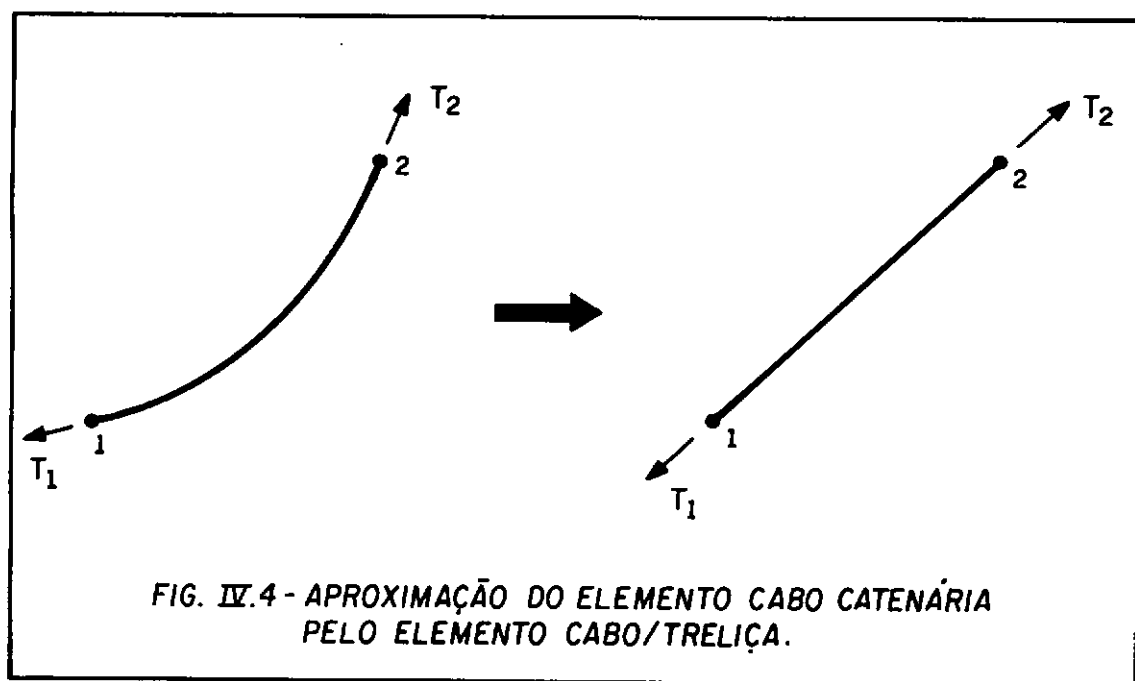
(i) um em que o cabo é modelado com um único elemento retilíneo de treliça entre as suas extremidades, adotando um

módulo de elasticidade equivalente ao do cabo curvo, função da tensão aplicada e de outros parâmetros [1,31-33,35]. Para a obtenção deste módulo de elasticidade é admitida a forma parabólica para o cabo [1,31,32]. As aproximações que têm sido adotadas para a obtenção desse módulo equivalente resultam em geral na expressão deduzida originalmente por ERNST [32].

(ii) um outro modo de se levar em conta a não-linearidade do cabo é através da atualização das matrizes de rigidez tangentes, durante um processo não-linear geométrico, dos vários elementos de treliça com tensão inicial utilizados para discretizar o cabo. Este procedimento é adotado no presente trabalho, sendo, então, as tensões nos estais calculadas passo a passo, com correções de geometria e atualização da matriz de rigidez geométrica. Assim, para um cabo discretizado por elementos de treliça sujeito a uma carga de tração e ação do peso próprio, a geometria é corrigida passo a passo (num processo incremental - iterativo) e o cálculo da deformação axial de cada elemento levará em conta tanto o alongamento devido à extensão elástica do elemento retilíneo, quanto o alongamento aparente devido à mudança de geometria da poligonal que aproxima a forma de catenária. Isto é ilustrado na figura IV.4.

Encontram-se também, na literatura sobre o assunto, trabalhos que fazem uso simultâneo do módulo equivalente e da matriz tangente [2,36]. Entretanto, esta técnica parece

não ser muito coerente já que é conflitante com a idéia básica para a obtenção deste módulo tal como descrito anteriormente no item (i) e nas referências [33,37]. Segundo FLEMING [33], uma maneira conveniente de se considerar a não-linearidade num cabo estai inclinado é adotar um módulo de elasticidade equivalente: "este módulo combina ambos os efeitos de deformações do material e geométrica, já que a rigidez axial equivalente do membro retilíneo, para alguma combinação particular da flecha e da tensão no cabo, é a mesma que a rigidez axial do cabo na sua forma catenária.



A aproximação usada neste trabalho é dada por uma matriz tangente de treliça espacial, constituída da parte elástica mais a geométrica, com consideração de tensão inicial.

Esta matriz no sistema de referência local é

representada por:

$$\tilde{K}_T^{C.T} = \tilde{K}_E^{C.T} + \tilde{K}_G^{C.T} \quad (IV.9)$$

onde $\tilde{K}_T^{C.T}$ é a matriz elástica linear e $\tilde{K}_G^{C.T}$ a matriz de rigidez geométrica.

No sistema de referência global é dada por:

$${}^G\tilde{K}_T^{C.T} = \tilde{T}_T^t \tilde{K}_T^{C.T} \tilde{T}_T \quad (IV.10)$$

onde se aplicam as mesmas transformações utilizadas anteriormente para o elemento de pórtico espacial.

Para convenção de sinais de deslocamentos e forças no elemento é usado o mesmo critério adotado para o elemento de pórtico espacial. O elemento de treliça espacial é mostrado na figura IV.5.

Por uma questão de completeza, a matriz de rigidez elástica $\tilde{K}_E^{C.T}$ (de dimensão 6x6), a matriz de rigidez geométrica $\tilde{K}_G^{C.T}$ (6x6) e a de rotação \tilde{T}_T (6x6) são apresentadas no apêndice B.

Montagem das Matrizes

Como se viu, a matriz para o elemento de pórtico espacial é de ordem 12 enquanto a de treliça espacial é de ordem 6. Assim, quando se vai gerar a matriz global da estrutura, os coeficientes do elemento de treliça espacial são espalhados numa matriz 12x12. Com isso, tem-se nas direções 4, 5, 6 e 10, 11, 12 contribuições nulas relativas aos coeficientes do elemento de treliça; já as direções 7,

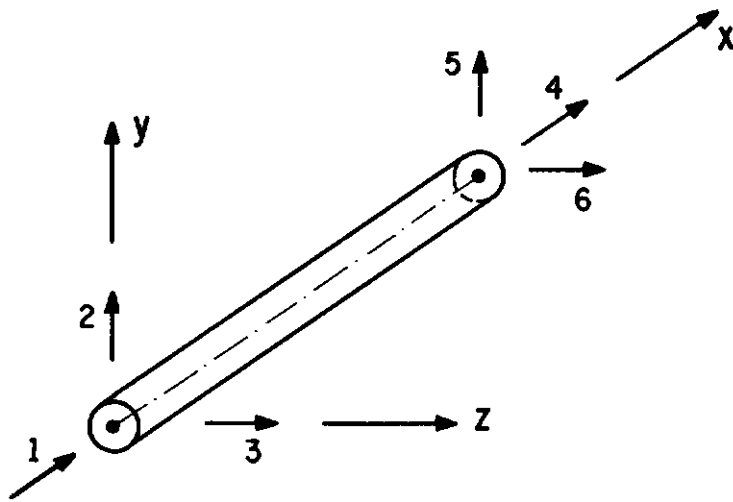


FIG. IV.5 - ELEMENTO DE TRELIÇA ESPACIAL.

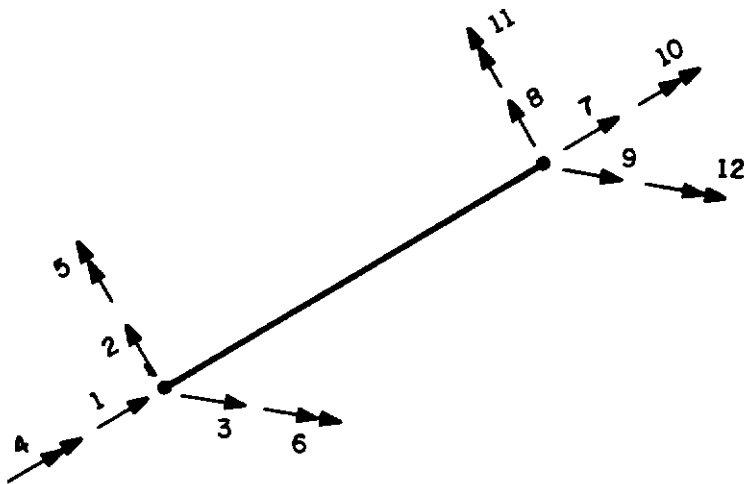


FIG. IV.6 - GRAUS DE LIBERDADE DO ELEMENTO DE TRELIÇA ESPACIAL EM RELAÇÃO AO ELEMENTO DE PÓRTICO ESPACIAL.

8 e 9 passam a corresponder às direções 4,5 e 6 do elemento de treliça (fig. IV.5). A figura IV.6 mostra a distribuição das direções pertinentes ao elemento de treliça espacial em relação às direções do elemento de pórtico espacial.

Formação de Mecanismos Hipoestáticos

Elementos de treliça espacial não transmitem momentos nos nós, devendo-se portanto ter cuidado, para uma dada modelagem, com os mecanismos hipoestáticos internos que podem surgir. Estes mecanismos surgem quando se usa o elemento de treliça sem tensão inicial, já que nestes casos coeficientes nulos são gerados na diagonal da matriz global da estrutura, tornando-a singular. No caso de cabos protendidos, a tensão inicial aplicada, levada em consideração na matriz de rigidez geométrica, produz transmissão de esforços axiais entre elementos e conseqüentemente, numa configuração não-colinear dos elementos, a formação de um mecanismo é eliminada.

O cabo reto protendido (vide capítulo V) mostra claramente que a tensão inicial de partida elimina tal mecanismo.

O exemplo que é mostrado a seguir (fig. IV.7) ilustra um tipo desses problemas. Como neste caso não existe tensão axial nos elementos colineares, na configuração indeformada a força P não é equilibrada. Se, contrariamente, os elementos colineares tivessem sujeitos a uma tensão inicial, numa configuração deformada vizinha haveria equilíbrio entre

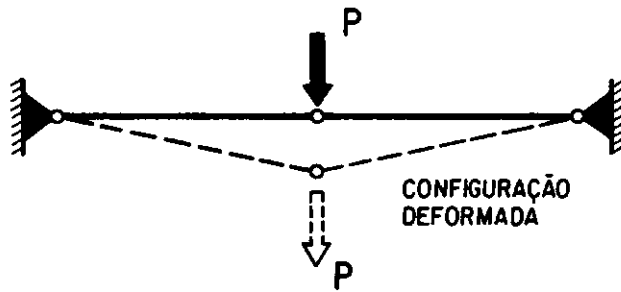


FIG. IV.7 - ELEMENTOS COLINEARES DE TRELIÇA SEM PRETENSÃO.

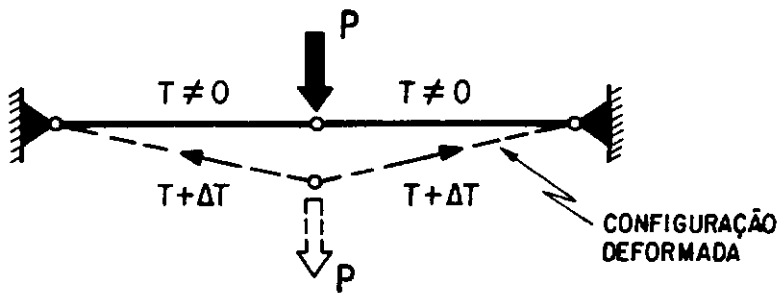


FIG. IV.8 - ELEMENTOS COLINEARES DE TRELIÇA COM PRETENSÃO.

P e forças $T+\Delta T$ (fig. IV.8). Pode-se assim concluir que a protensão elimina o mecanismo hipoestático interno.

Outro problema que pode surgir discretizando-se o cabo por elementos cabo/treliça é quando o carregamento aplicado promove uma forte mudança na configuração geométrica em relação à inicial. O problema de cabo poligonal mostrado na figura IV.9 é um exemplo dessa situação. No caso, o carregamento assimétrico promove uma mudança de configuração tão acentuada (mostrada na figura em linha tracejada) que a aproximação aqui adotada para não-linearidade (expressa por K_G) é insuficiente para restaurar o equilíbrio estático na configuração deformada.

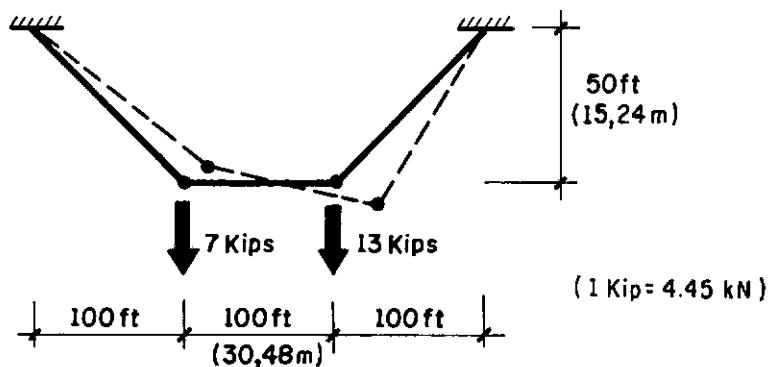


FIG. IV.9 - CABO POLIGONAL COM CARREGAMENTO ASSIMÉTRICO [24].

Sabe-se que um cabo ideal não oferece resistência à flexão nem à compressão. Devido a esta característica dos cabos, em estruturas estaiadas onde os cabos geralmente são dispostos em pares opostos como ilustrado na figura IV.10 , a carga externa P provoca um aumento de tensão no cabo 1 e diminuição no cabo 2. Quando a carga P é tal que elimina

toda a tensão inicial no cabo 2 tornando-o sem função estrutural (inoperante), os seus elementos cabo/treliça são daí em diante submetidos a "carga compressiva" gerando instabilidade numérica no sistema de equações, isto é, há formação de um mecanismo hipoestático. Este problema será discutido no caso da torre estaiada, capítulo V.

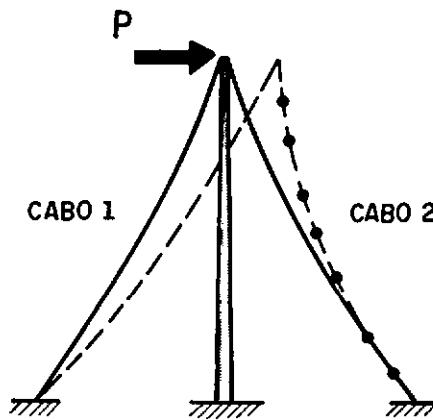


FIG. IV.10 - TORRE ESTAIADA: CABO 2 COM PERDA DE PRETENSÃO.

CAPÍTULO V

APLICAÇÕES

V.1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo encontra-se dividido basicamente em duas partes: uma, na qual se apresentam os exemplos-teste; outra, onde aplicações a pontes estaiadas no plano e no espaço são mostradas.

Os exemplos-teste, embora simples, propiciam a descoberta e discussão clara de determinados problemas de modelagem que podem surgir na análise de estruturas de maior porte. Ainda mais, possibilitam testar e sentir o comportamento dos elementos separadamente e averiguar de que forma os mesmos contribuirão no sistema estrutural funcionando como um todo. Assim, muitas das conclusões apresentadas ao longo do texto são frutos das análises dos resultados numéricos desses exemplos. Pode-se notar, além disso, que a ordem de apresentação das aplicações obedece a uma seqüência lógica de crescente complexidade. Com essa seqüência de aplicações pode-se aferir a validade da formulação apresentada no capítulo II, de maneira gradual, culminando em aplicações práticas da engenharia, onde a potencialidade da formulação como um todo é verificada.

Observação:

As unidades usadas ao longo deste capítulo são as mesmas adotadas nos trabalhos originais; apresentando-se, contudo, logo em seguida, entre parênteses, os valores em

relação ao SI (Sistema Internacional de Unidades).

V.2 - EXEMPLOS-TESTE

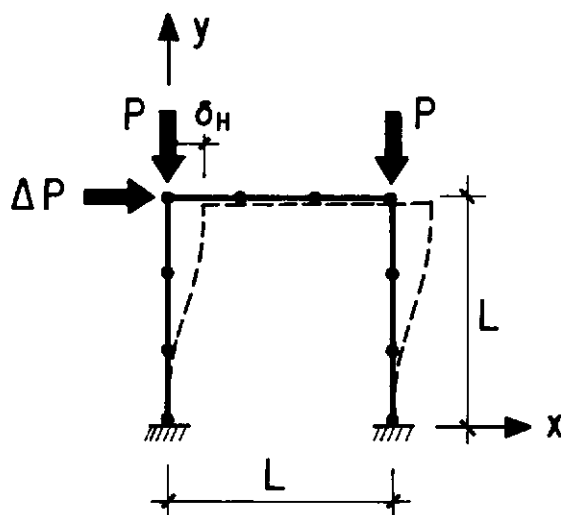
V.2.1 - PÓRTICO PLANO

Com este exemplo foi possível testar através da solução da equação (II.4), o elemento de pórtico para análise de estruturas com não-linearidade geométrica moderada, obtendo-se, além da resposta carga x deslocamento, uma estimativa da carga de colapso. Alternativamente foi usado o algoritmo descrito na seção III.5 do capítulo III para cálculo da carga crítica, através do critério de frequência nula ($\omega^2 = 0$).

A figura V.1 mostra a discretização da estrutura juntamente com suas características geométricas e propriedades do material. A estrutura de pórtico plano metálico biengastado foi discretizada em 9 elementos de pórtico espacial com 6 graus de liberdade por nó, sendo 3 inativos. A estrutura de pórtico poderia representar um pórtico tipo do 1º pavimento de um edifício alto. O carregamento externo atua tal como mostrado na figura V.1, com uma pequena carga horizontal tomada como 1/1000 da carga vertical.

Respostas Estáticas Não-Lineares

As respostas não-lineares, carga vertical versus deslocamento horizontal, apresentadas nos trabalhos de



CARACTERÍSTICAS

$$\text{ÁREA} = 7,59 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_z = 1,29 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$E = 2,1 \times 10^7 \text{ tf/m}^2 (2,1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2)$$

$$L = 3,05 \text{ m}$$

PESO ESPECÍFICO

$$\rho = 7,85 \text{ tf/m}^3 (77 \text{ kN/m}^3)$$

ACELERAÇÃO GRAVIDADE

$$g = 9,81 \text{ m/seg}^2$$

$$\Delta P = P/1000 \text{ (tf)}$$

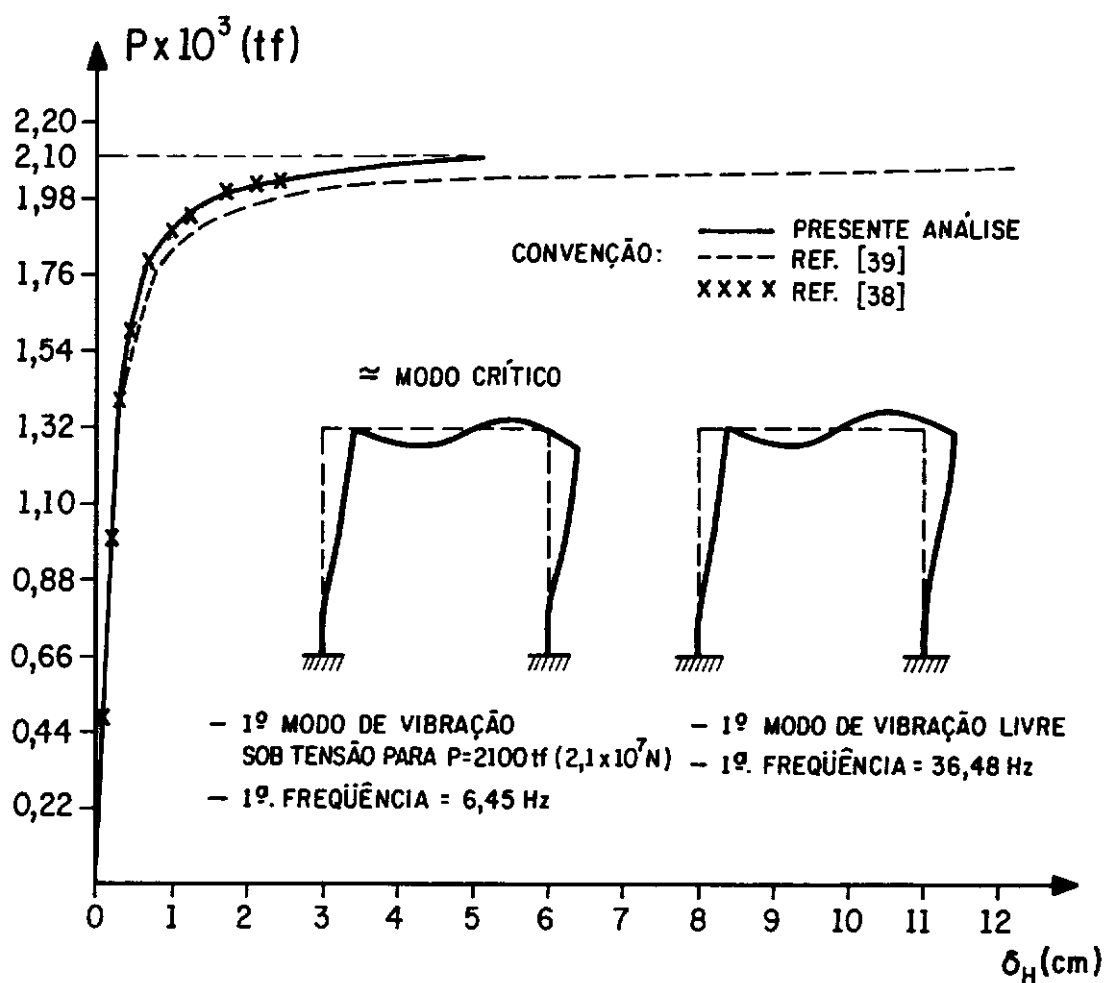


FIG. V.1 - RESPOSTA ESTATICA NÃO-LINEAR E MODOS DE VIBRAÇÃO DO PÓRTECO PLANO.

CONNOR [38] e de MANTILLA [39], mais a obtida no presente trabalho são mostradas, para efeito de comparação, na figura IV.1. Observa-se uma boa concordância entre as respostas de CONNOR e da presente análise até a carga de 1950 tf ($1,91 \times 10^7$ N). Deve-se destacar, porém, a diferença entre estes resultados e os de MANTILLA, para os quais se verifica uma significativa diferença entre deslocamentos, próximos à carga de colapso. Esta diferença se deve à formulação apresentada na referência [39], que por considerar grandes deslocamentos torna-se mais sensível às mudanças geométricas. Esta comprovação em nada prejudica os resultados do presente trabalho, já que a aproximação aqui adotada para a matriz tangente ($K_T \approx K_E + K_G$) é dirigida à solução de problemas moderadamente não-lineares, como ocorre geralmente nas estruturas de pórticos estaiados.

Carga Crítica Estática

A determinação da carga crítica é feita através da aplicação do critério de frequência nula, $\omega^2 = 0$.

A tabela V.1 mostra os resultados obtidos para as cargas "críticas" do pórtico plano da figura V.1.

Tabela V.1 - Cargas críticas e de colapso do pórtico plano segundo vários trabalhos.

Ref. [38] Carga de "colapso"	Ref. [39] Carga de "Colapso"	Ref. [40] Carga crítica	Presente Análise Carga Crítica	Presente Análise Carga de Colapso
$\approx 2000 \text{tf}$ $\approx 1,96 \times 10^7 \text{ N}$	2075tf $2,03 \times 10^7 \text{ N}$	2165tf $2,12 \times 10^7 \text{ N}$	2148tf $2,1 \times 10^7 \text{ N}$	2130tf $2,08 \times 10^7 \text{ N}$

Observa-se, em comparação com os resultados das referências [38,39], que o valor aqui obtido para a carga crítica juntamente com o da referência [40] se constitui, como esperado, num limite superior das cargas de colapso. A figura V.2 ilustra o procedimento adotado para determinação da carga crítica. Deve-se esclarecer que as cargas de colapso são associadas à carga máxima atingida ao longo da resposta não-linear, isto é, associadas à ocorrência de não convergência do processo numérico. Por outro lado, as cargas críticas resultam da solução do problema linearizado de autovalor.

Vibrações Sob Tensões Iniciais

A figura V.1 mostra também os modos de vibração e suas frequências, respectivamente para a estrutura submetida a um carregamento próximo do crítico ($P = 2100\text{tf}$; $\Delta P = 2,1\text{tf}$) e para a estrutura em vibração livre ($P=\Delta P=0$). Pode-se notar aí a influência das tensões (ou forças) iniciais, devidas ao carregamento imposto, sobre as frequências de vibração. Verifica-se que a 1ª. frequência, cujo valor é de 36,48 Hz, para o pórtico em vibração livre, é reduzida para 6,45 Hz, correspondente a aproximadamente 18% de 36,48 Hz, quando se considera a estrutura vibrando em torno da configuração deformada sob ação do carregamento estático. Nota-se, portanto, uma tendência para o anulamento da 1ª. frequência, como era de se esperar, para um carregamento próximo do crítico. Deve-se observar aqui o comportamento característico de um pórtico flexível como ilustrado na

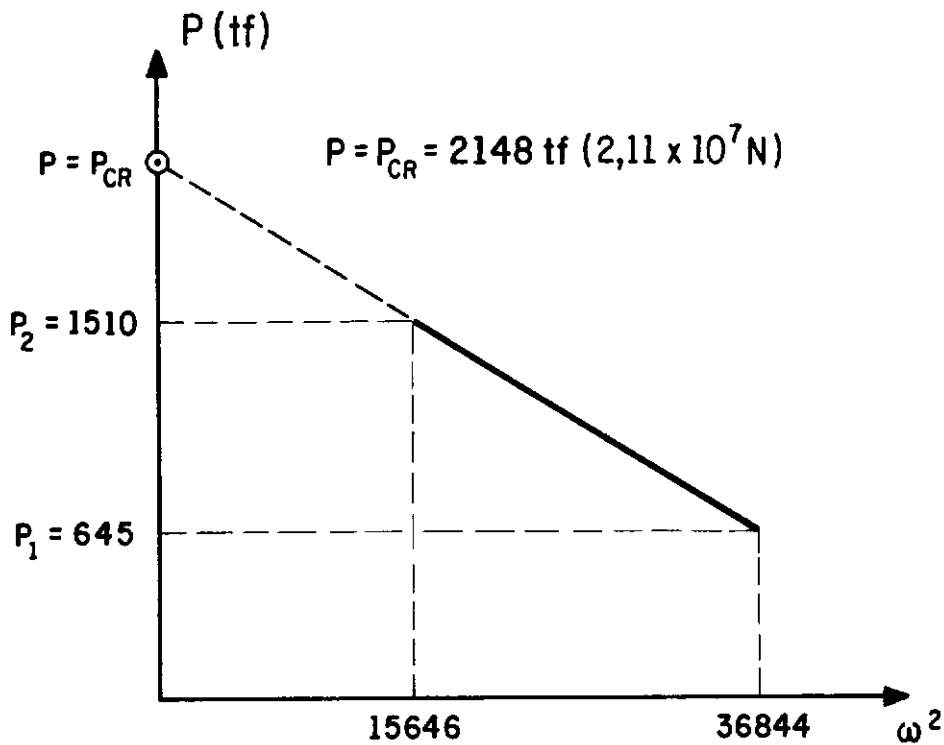
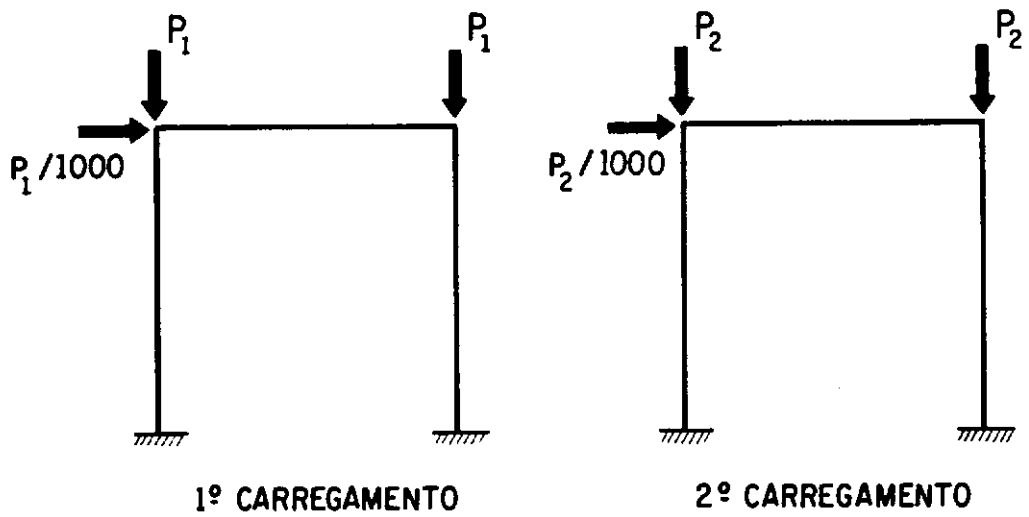


FIG. V.2 - DETERMINAÇÃO DA CARGA CRÍTICA ATRAVÉS DO CRITÉRIO DINÂMICO.

figura V.1: com o acréscimo de carga há uma redução de rigidez da estrutura e, conseqüentemente, das freqüências de vibração.

Este exemplo deixa claro a influência de tensões iniciais, sempre presentes nas estruturas de pórtico estaiado por cabos protendidos, sobre as freqüências "naturais". Além disso, essas estruturas estaiadas, por serem "flexíveis", assumem, sob ação do carregamento estático, uma configuração deformada de equilíbrio diferente da configuração geométrica original e, portanto, são passíveis de alterações substanciais em suas freqüências de vibração.

Sensibilidade do Processo Numérico

Por último, resta um comentário sobre o método numérico de resolução adotado. O tamanho do passo de carga e conseqüentemente o número total de incrementos influencia de maneira expressiva o resultado final de cálculo. Esta influência é função do grau de não-linearidade geométrica exibida pela estrutura de pórtico "flexível".

V.2.2 - CABO RETO PROTENDIDO

Neste segundo exemplo são analisados os comportamentos estático não-linear e vibrações lineares sob tensões iniciais de um cabo protendido, que se constitui num componente importante das estruturas estaiadas.

Nesta aplicação, um cabo inicialmente reto, cujas dimensões e propriedades do material são dadas na figura

V.3, é submetido a uma protensão inicial de $20 \times 10^3 \text{ lb/in}^2$ ($3,4 \times 10^7 \text{ N/m}^2$). Os resultados das análises estática e de vibrações permitem a verificação da potencialidade e da eficiência da formulação adotada para aproximar a configuração de catenária de um cabo, através de sua discretização por elementos de treliça sujeitos à tração inicial.

Resposta Estática

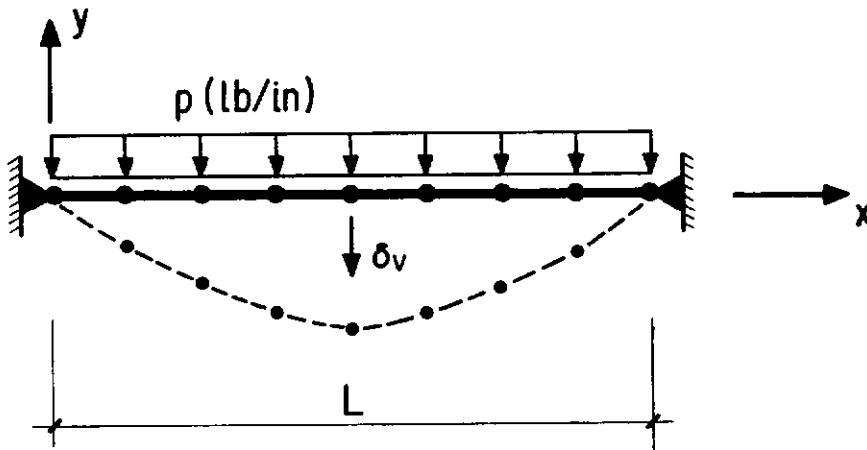
A tabela V.2 apresenta uma comparação entre resultados obtidos para o deslocamento máximo do cabo, segundo a presente análise não-linear estática e segundo duas formulações distintas: uma de DESAI [27] que usou um único elemento parabólico de três nós; e outra de OZDEMIR [41] que usou 12 elementos parabólicos de três nós para a discretização da metade do cabo, tomando partido da simetria na análise estática não-linear.

Tabela V.2 - Deslocamento máximo do cabo da fig. V.3.

DESLOCAMENTO MÁXIMO DO CABO		
Presente Análise	Desai [27]	Ozdemir [41]
131.5 in (3,34 m)	131.54 in (3,34 m)	131.60 in (3,34 m)

Dessa tabela V.2 pode-se notar a boa concordância entre os resultados.

Na presente análise estática não-linear, o cabo foi discretizado em 8 elementos de cabo/treliça e os resultados



$$\text{ÁREA} = 0,065 \text{ in}^2 \quad (4,19 \times 10^{-5} \text{ m}^2)$$

$$E = 20 \times 10^6 \text{ lb/in}^2 \quad (1,38 \times 10^{11} \text{ N/m}^2)$$

$$\text{CARACTERÍSTICAS: } \mu = 7,96 \times 10^4 \text{ lb} \times \text{s}^2/\text{in}^4 \quad (8,51 \times 10^3 \text{ N} \times \text{s}^2/\text{m}^4)$$

$$\text{TENSÃO INICIAL} = 20 \times 10^3 \text{ lb/in}^2 \quad (1,38 \times 10^8 \text{ N/m}^2)$$

$$p = 0,02 \text{ lb/in} \quad (3,51 \text{ N/m})$$

$$L = 10.000 \text{ in} \quad (254 \text{ m})$$

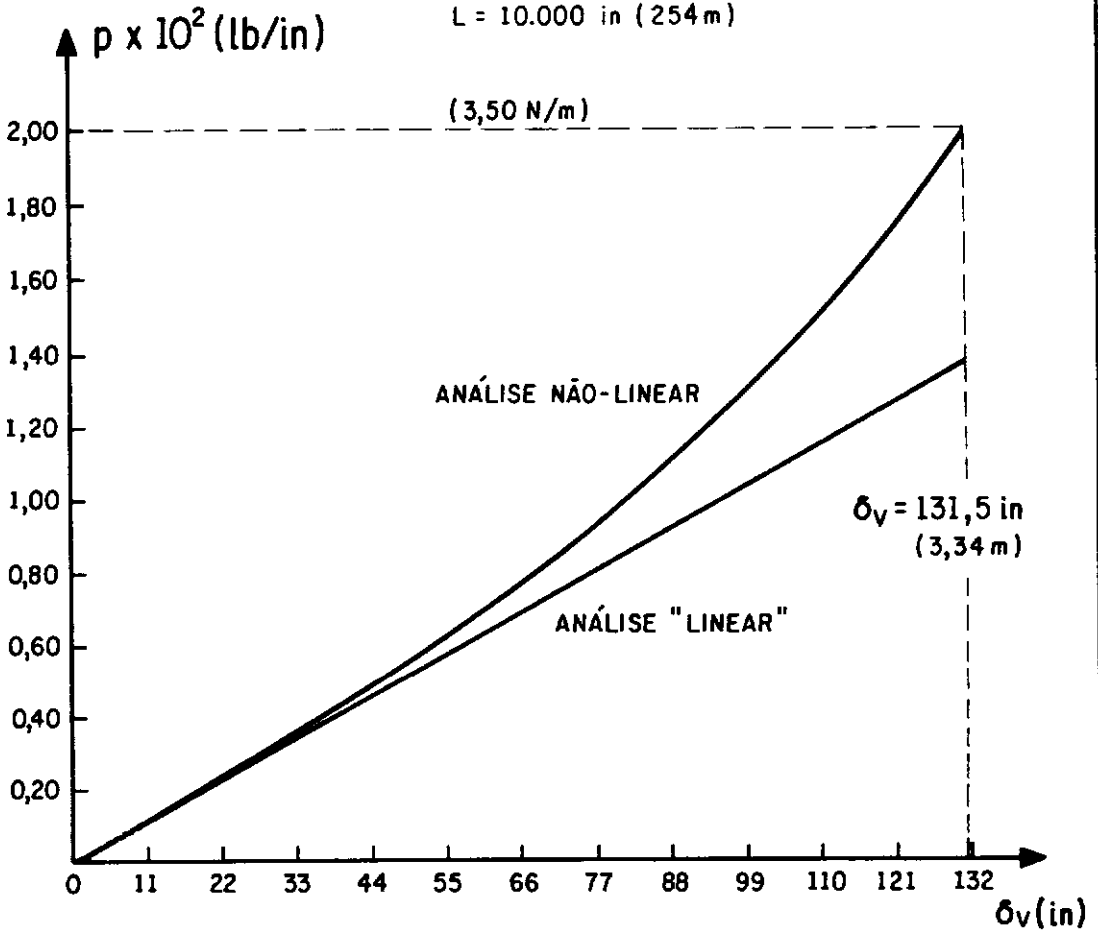


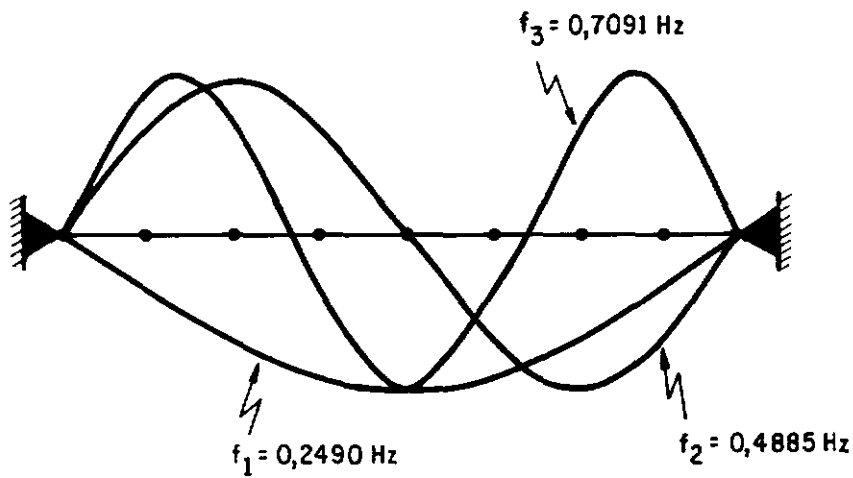
FIG. V.3 - RESPOSTA NÃO-LINEAR DO CABO PROTENDIDO.

obtidos são idênticos àqueles quando se discretiza a metade do cabo com 4 elementos.

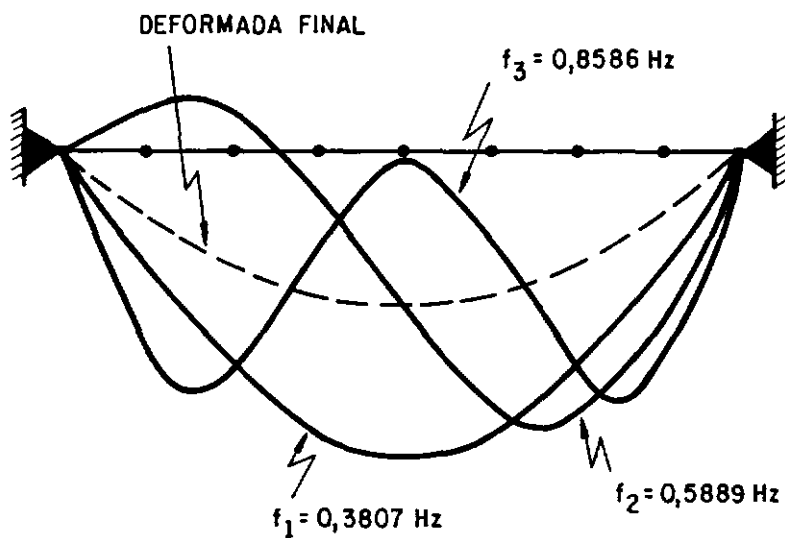
A figura V.3 mostra a resposta não-linear estática do cabo protendido sob ação crescente da carga distribuída versus o deslocamento no meio do cabo. Verifica-se aqui que, contrariamente ao comportamento observado do pórtico do 1º. exemplo, a não-linearidade se processa com ganho de rigidez. A outra curva referida na figura V.3 como análise "linear" não foi obtida através da solução elástica linear clássica, que faz uso somente da matriz de rigidez elástica. Para esta análise "linear" adotou-se uma matriz resultante da soma da matriz elástica com a geométrica (montada com as forças iniciais da protensão), sendo a carga transversal aplicada de uma só vez. Deve-se lembrar ainda que não seria possível se proceder a uma análise linear clássica somente com K_E , devido à formação do mecanismo hipostático tal como discutido no capítulo IV. Conclui-se, portanto, mais uma vez, que os elementos cabo/treliça, quando colineares na configuração inicial, se submetidos a uma carga transversal, necessitam de uma protensão para se tornarem "auto - equilibrados" naquela configuração retilínea.

Vibrações Sob Tensões Iniciais

As formas dos modos de vibração em torno das configurações geométrica inicial e deformada final, juntamente com os respectivos valores das frequências naturais, são mostradas na figura V.4. Para a obtenção daqueles valores foram realizadas duas análises: (i) na



CONFIGURAÇÃO INICIAL ($p = 0$)



CONFIGURAÇÃO FINAL ($p = 2 \times 10^{-2} \text{ lb/in}$)

FIG. V.4 - MODOS DE VIBRAÇÃO DO CABO PROTENDIDO.

primeira, calculou-se os modos e frequências na configuração geométrica inicial para o cabo sob protensão. Para isto, foram montadas as matrizes \tilde{K}_E e \tilde{K}_G (função da tensão inicial) e em seguida foi resolvido o problema de autovalor (equação II.46) para determinação das frequências e modos de vibração associados; (ii) na segunda, realizou-se inicialmente uma análise não-linear estática, com a qual obteve-se a configuração deformada final representada pela linha tracejada na figura V.4. Os valores dos esforços finais nos elementos, resultantes da análise estática não-linear, são tomados como valores iniciais do problema dinâmico de autovalor (equação II.46). As linhas cheias representam as formas dos modos de vibração em torno da configuração deformada final de equilíbrio estático.

Os valores aqui obtidos para as 1^{as}. frequências relativas respectivamente às configurações inicial ($f_1 = 0,2490$ Hz) e final ($f_1 = 0,3807$ Hz), apresentam uma diferença percentual de apenas 1% em relação aos resultados obtidos por OZDEMIR: 0,2506 e 0,3852 Hz respectivamente.

Em função da simplicidade da presente aproximação por elementos de treliça, essa comparação de resultados demonstra o ótimo desempenho da formulação usada para as análises estática e dinâmica de cabos.

A tabela V.3 mostra as diferenças percentuais relativas entre os valores aqui obtidos para as frequências associadas às configurações inicial e final.

Tabela V.3 - Diferença percentual relativa entre as frequências (configuração inicial e final).

FREQUÊNCIA (Hz)		Diferença Percentual Relativa
Configuração Final	Configuração Inicial	
1 ^a . 0,3807	0,2490	34,6
2 ^a . 0,5889	0,4885	17,1
3 ^a . 0,8586	0,7091	17,4

Nota-se nesta tabela que a maior diferença corresponde a 1^a. frequência natural, reduzindo-se à metade para a 2^a. e 3^a. frequências.

Com os resultados obtidos para este exemplo ficam evidenciadas duas coisas: 1^o.) a necessidade de, em estruturas de cabos, se proceder a uma análise estática não-linear, já que o equilíbrio é verificado para uma configuração bastante diferente da inicial; 2^o.) da necessidade de uma análise de vibrações sob tensões iniciais, em torno desta configuração deformada final, já que existem diferenças significativas entre as frequências relativas a uma e outra configuração estática.

Procedimento Numérico

O algoritmo usado para a análise estática foi o algoritmo 1, descrito na seção III.3.1 do capítulo III, no qual a tensão inicial é equilibrada no 1^o. passo de carga.

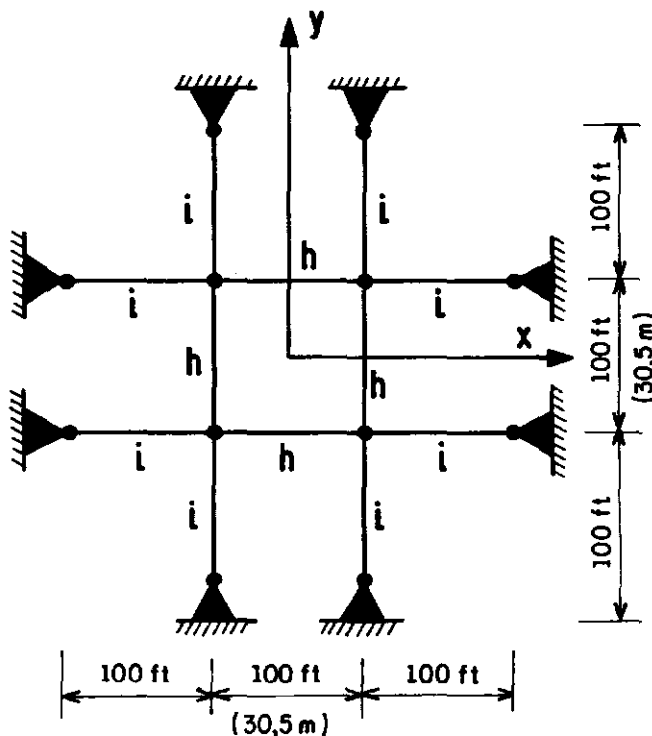
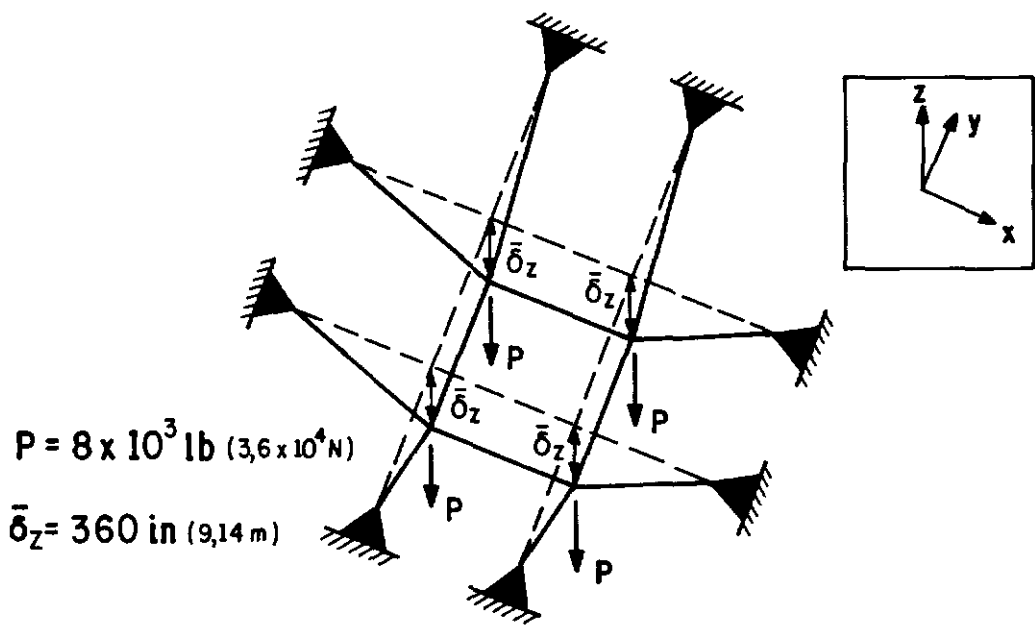
IV.2.3 - CABOS POLIGONAIS PROTENDIDOS

A figura V.5 mostra uma vista tridimensional da malha de cabos com uma flecha inicial $\bar{\delta}_z = 360$ in (9,14 m) e uma carga vertical $P = 8000$ lb ($3,6 \times 10^4$ N), para cada um dos vértices definido pelo cruzamento dos cabos. As características geométricas, propriedades do material, dimensões e discretização adotada encontram-se também naquela figura. Os trechos horizontais dos cabos, representados em planta pela letra h, e os trechos inclinados dos cabos, representados pela letra i, estão submetidos respectivamente a forças iniciais de 5459 lb ($2,4 \times 10^4$ N) e de 5225 lb ($2,3 \times 10^7$ N). A massa específica do material é tomada como 7.96×10^{-4} lb.s²/in⁴ ($8,86 \times 10^3$ N.s²/m⁴) e o peso próprio do cabo é desprezado na análise estática.

Neste exemplo, um pouco mais complexo do que o anterior, um sistema de cabos formando uma malha é usado como suporte para cargas verticais, as quais podem ser imaginadas como oriundas de uma subestrutura ou equipamento sustentada por este sistema de cabos.

Resposta Estática

DESAI e colaboradores [27] fizeram apenas a análise estática desta estrutura. Os resultados obtidos por eles, juntamente com os valores obtidos neste trabalho são apresentados na tabela V.4, que mostra os valores do deslocamento de um dos vértices da malha de cabos.



CARACTERÍSTICAS

$$A = 0,227 \text{ in } (1,46 \times 10^{-4} \text{ m}^2) \quad E = 12 \times 10^6 \text{ lb/in}^2 (8,27 \times 10^{10} \text{ N/m}^2)$$

$$\begin{cases} \text{FORÇA INICIAL} & h = 5459 \text{ lb } (24293 \text{ N}) \\ \text{NOS CABOS} & i = 5325 \text{ lb } (23696 \text{ N}) \end{cases}$$

$$\text{Massa Específica: } \mu = 7,96 \times 10^{-4} \text{ lb x s}^2/\text{in}^4 (8,51 \times 10^{-3} \text{ N x s}^2/\text{m}^4)$$

FIG. V.5 - GEOMETRIA E DISCRETIZAÇÃO DE ESTRUTURAS DE CABOS POLIGONAIS PROTENDIDOS.

Observa-se que, pela simetria do sistema de cabos e cargas, todos os vértices apresentam o mesmo deslocamento.

Tabela V.4 - Deslocamentos para os cabos poligonais protendidos.

COMPONENTES	DESLOCAMENTOS	
	Presente Estudo	Referência [27]
X	-0,1326 ft (0,04 m)	-0,1318 ft (0,04 m)
Y	-0,1326 ft (0,04m)	-0,1318 ft (0,04 m)
Z	-1,4567 ft (0,44m)	-1,4636 ft (0,45 m)

Pode-se notar da tabela V.4 que a diferença percentual relativa entre os resultados fica abaixo de 1%, demonstrando mais uma vez que quando o carregamento externo atua sempre no sentido de tensionar os cabos (tal como no 2º. exemplo), o elemento de cabo/treliça funciona sem qualquer problema.

Outros resultados, obtidos segundo formulações diferentes e também apresentados na referência [27], são todos próximos daqueles da tabela V.4.

Procedimento Numérico

A figura V.6 mostra a resposta não-linear estática, carga P versus deslocamento vertical δ_v , obtida usando-se o algoritmo 1 descrito no capítulo III. As setas com o número 1 indicam, sobre o caminho de equilíbrio, o sentido inicial do deslocamento vertical; esse sentido inicial é o sentido

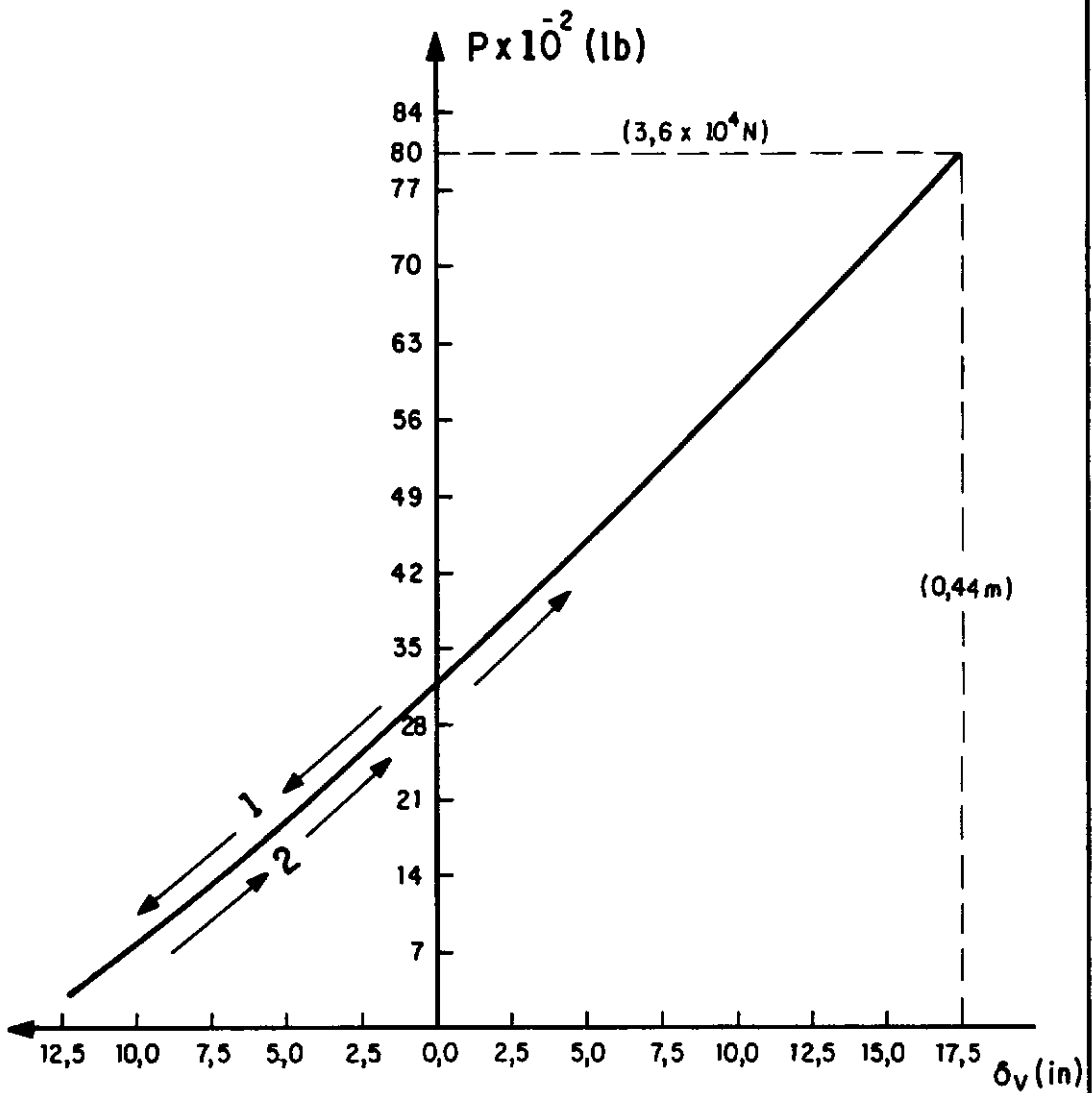
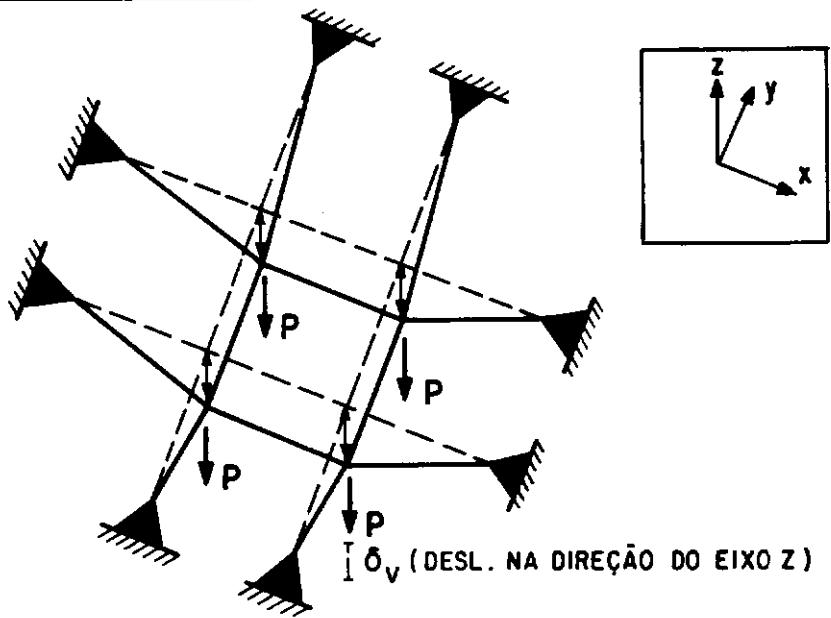


FIG. V. 6 - RESPOSTA NÃO-LINEAR SOB PROTENSÃO TOTAL.

positivo do eixo "Z". Isto acontece porque no início do processo a protensão total aplicada supera o valor da carga vertical, que é incrementada passo a passo. O deslocamento continuará no sentido positivo sobre o caminho de equilíbrio até que o valor acumulado da carga vertical supere o da protensão inicial. A partir desse ponto, o deslocamento muda de sentido, agora indicado pela seta com o número 2, até se atingir a configuração final de equilíbrio.

Empregando-se o algoritmo 2, descrito no capítulo III, a resposta não-linear é aquela mostrada na figura V.7. Como para este algoritmo a tensão inicial é também incrementada, a composição do incremento da força externa e da força interna (força inicial) resulta em deslocamentos verticais no sentido negativo do eixo "Z".

Percebe-se através dos gráficos ilustrados nas figuras V.6 e V.7 que o comportamento não-linear desta estrutura é caracterizado por ganho de rigidez, embora o grau de não-linearidade geométrica seja muito pequeno.

Vibrações Sob Tensões Iniciais

O sistema de cabos da figura V.5 foi analisado para vibrações em torno da configuração inicial ($P=0$ e sob protensão) e em torno da configuração final (sob protensão e carregamento). A tabela V.5 mostra os resultados obtidos, em termos de frequência, para estas análises.

Tabela V.5 - Freqüências de vibração dos cabos poligonais protendidos.

1 ^a . FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO (Hz)	
Configuração Inicial	Configuração Final
1,2247	1,8789

Aqui também se verifica uma diferença percentual relativa de aproximadamente 35% entre os valores das 1^{as}. freqüências das configurações final e inicial. Este resultado enfatiza, mais uma vez, a necessidade de uma análise de vibração na configuração final de equilíbrio para esse tipo de sistema estrutural.

Finalmente, a figura V.8 mostra a forma do 1^o. modo de vibração em torno da configuração deformada final, e o valor da 1^a. freqüência natural associada.

Procedimento Numérico

Os dois algoritmos de solução, tanto o que equilibra a protensão no 1^o. passo de carga - algoritmo 1 - quanto o que equilibra a protensão ao longo de todo o processo não-linear - algoritmo 2 - foram usados para se analisar esta estrutura.

Os resultados obtidos, tanto na análise estática quanto na dinâmica, para um e outro algoritmo de solução, apresentam praticamente o mesmo valor. A diferença fica em torno de 1%, como pode ser constatado através do valor do deslocamento vertical para o vértice da malha de cabos,

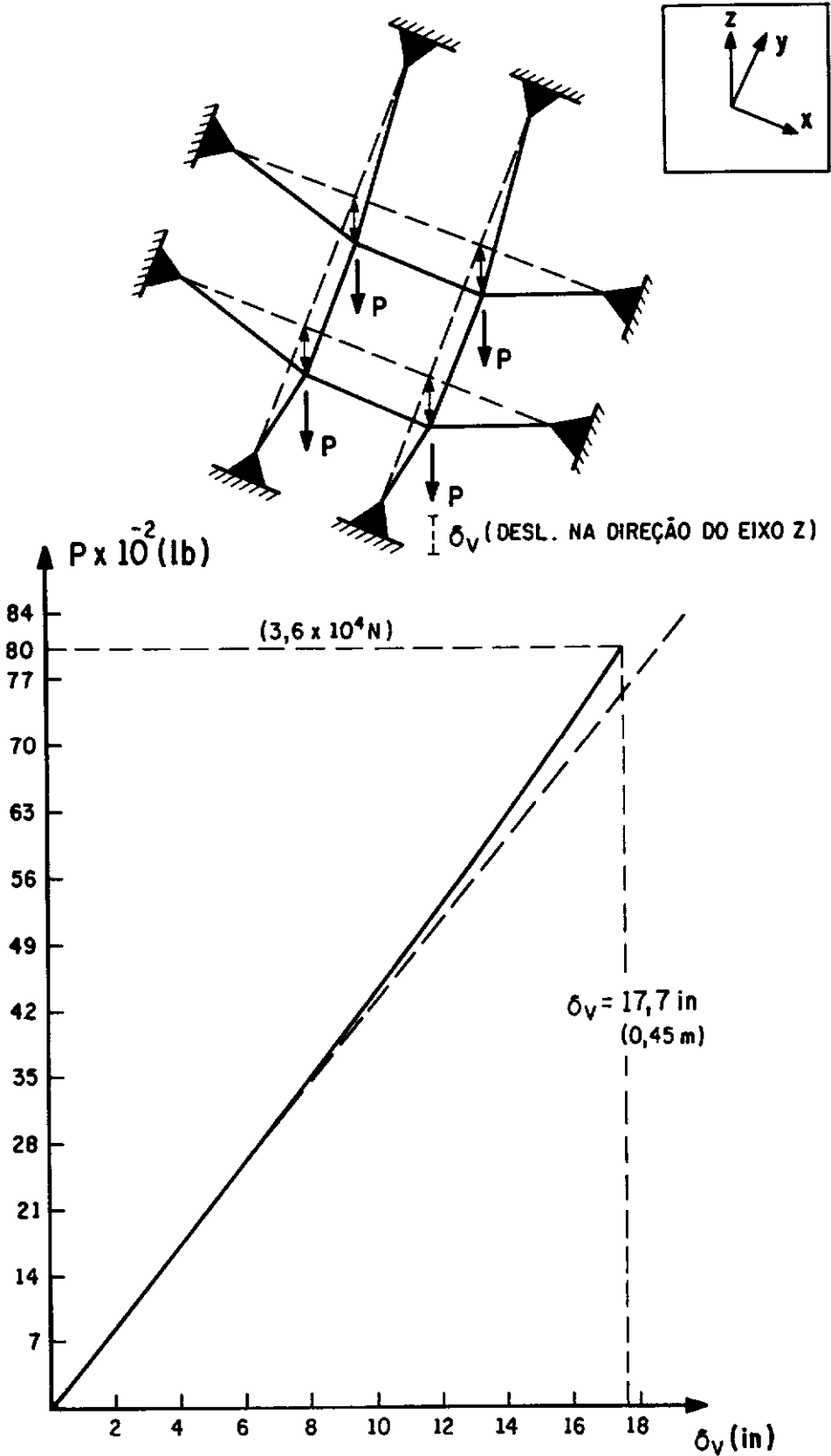


FIG. V.7 - RESPOSTA NÃO-LINEAR SOB CARREGAMENTO INCREMENTAL (PROTENSÃO E CARGAS EXTERNAS)

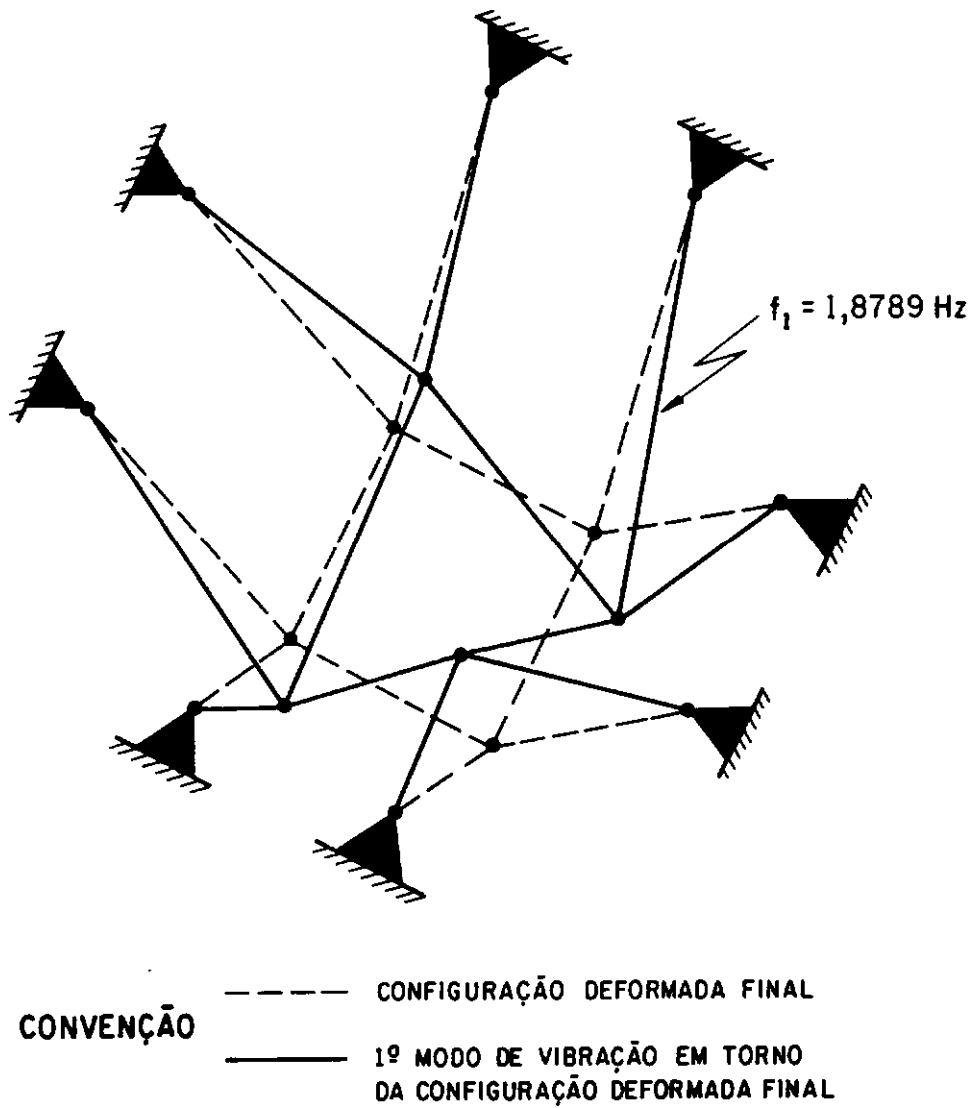


FIG. V.8 - MODO DE VIBRAÇÃO DA ESTRUTURA DE CABOS POLIGONAIS PROTENDIDOS.

mostrado respectivamente nas figuras V.7 e V.8. Existe, contudo, uma diferença em termos de caminho não-linear percorrido, como pode ser verificado nas figuras V.6 e V.7, cujas considerações já foram feitas no capítulo III.

IV.2.4 - TORRES ESTAIADAS

O intuito de apresentar a torre estaiada segundo duas análises foi para deixar claro os problemas que podem surgir para sistemas estruturais deste tipo. Assim, para a mesma torre estaiada a análise é realizada para os casos de 1 ou 2 cabos estais.

V.2.4.1 - TORRE ESTAIADA COM 2 CABOS

As propriedades do material, características geométricas e dimensões são dados na figura V.9, respectivamente para o cabo e mastro de aço. Os cabos 1 e 2 são discretizados em 4 elementos de cabo/treliça e o mastro, em 4 elementos de pórtico espacial, sendo três graus de liberdade inativos. A força inicial nos cabos é de 44,48 kN. O carregamento externo é constituído pela carga transversal P aplicada no topo do mastro e pelo peso próprio do cabo igual a 0,98 kN, ambas aplicadas como cargas pontuais nos pontos nodais.

Comportamento Estrutural

Inicialmente, procedeu-se à análise do mastro estaiado

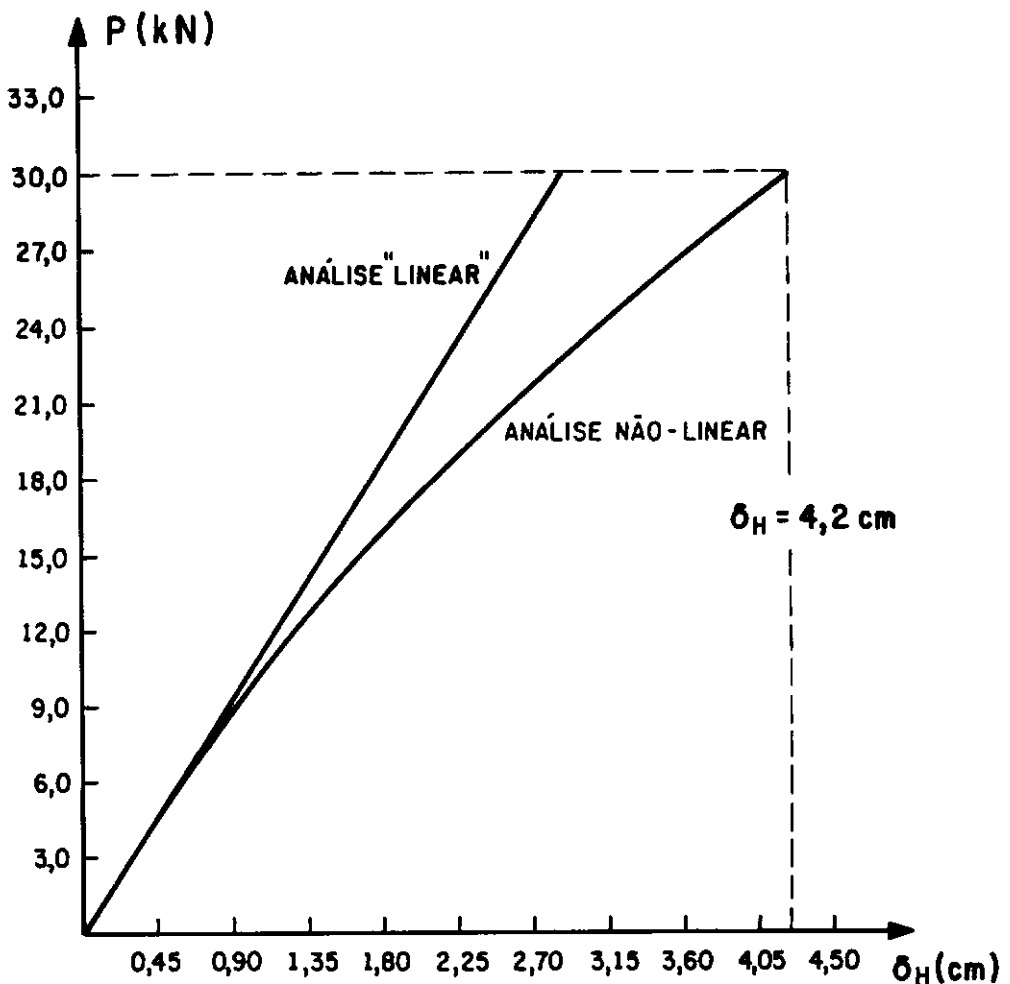
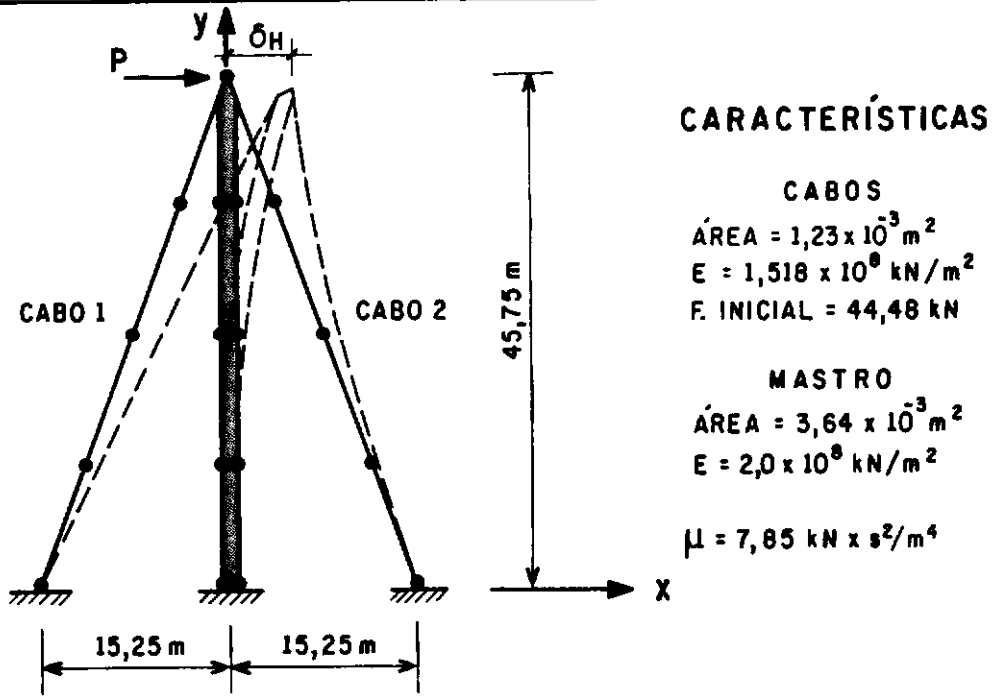


FIG. V. 9 - RESPOSTA NÃO-LINEAR DO MASTRO ESTAIADO.

com 2 cabos sob ação de uma carga $P = 222,30$ kN. Esta carga foi incrementada em 10 passos de carga e foi verificado que a partir do 2º. incremento o cabo 2 tornava-se frouxo devido à perda de pretensão provocado pela ação da carga P , induzindo uma força "compressiva" neste cabo. Quando se usa o elemento de cabo/treliça, pode ocorrer nestas situações um mecanismo hipoestático provocando uma instabilidade no algoritmo de solução.

Este mesmo problema foi resolvido por SCHEREFLE [42], EKHAND [2] e DESAI [27]. Destes, apenas SCHEREFLE se refere à perda de protensão no cabo 2, no 2º. incremento, quando a carga $P = 222,30$ kN é aplicada em 10 passos. CHU E MA [43] resolveram este mesmo problema analiticamente; mas todos esses autores se reportam apenas à análise estática.

O nível de carga P , a partir do qual o cabo 2 perde função estrutural, isto é, se torna inoperante, está entre 22,23 kN e 44,46 kN. Foi baseado neste fato que surgiu a idéia de se detectar aproximadamente a carga que provocava o mecanismo. Esta carga está em torno de 30 kN. Assim, a primeira análise foi realizada aplicando-se esta carga $P = 30$ kN no mastro estaiado com dois cabos, já que esta carga não provoca a perda de rigidez completa do cabo 2.

A partir deste nível de carga ($P \approx 30$ kN) para o qual o cabo 2 torna-se frouxo, poder-se-ia adotar um procedimento de reinício, onde se identificariam o patamar dos esforços internos existentes nos elementos e a geometria deformada, desprezando-se a partir daí o cabo 2 já inoperante, e reiniciando a análise para novos incrementos de carga, além de $P \approx 30$ kN.

Resposta Estática Não-linear

A resposta não-linear, carga versus deslocamento δ_H do topo da torre, é mostrada na figura V.9, onde pode-se observar que o deslocamento final para $P = 30$ kN é $\delta_H = 4,2$ cm.

Para análise "linear" (veja fig. V.9) adotou-se o mesmo procedimento que nos casos anteriores. Utilizou-se para a análise não-linear o algoritmo 1.

Vibrações Sob Tensões Iniciais

Nas figuras V.10a e V.10b são apresentadas, respectivamente, as formas dos 1º. e 2º. modos de vibração para a estrutura, em torno da configuração deformada final.

Observa-se nestas figuras que o cabo 1, fortemente tensionado, apresenta "amplitudes" (ortonormalizadas em relação à matriz de massa) de vibração muito menores do que aquelas exibidas pelo cabo 2, já afrouxado pela perda de protensão inicial causada pelo deslocamento transversal do topo da torre sob ação da carga P.

Os 1º. e 2º. modos para o mastro correspondem aos primeiros dois modos de vibração de uma viga em balanço. Para o cabo 2, observa-se que os 1º. e 2º. modos correspondem exatamente àqueles obtidos para o cabo reto protendido (vide fig. V.4) analisado na seção V.2.2.

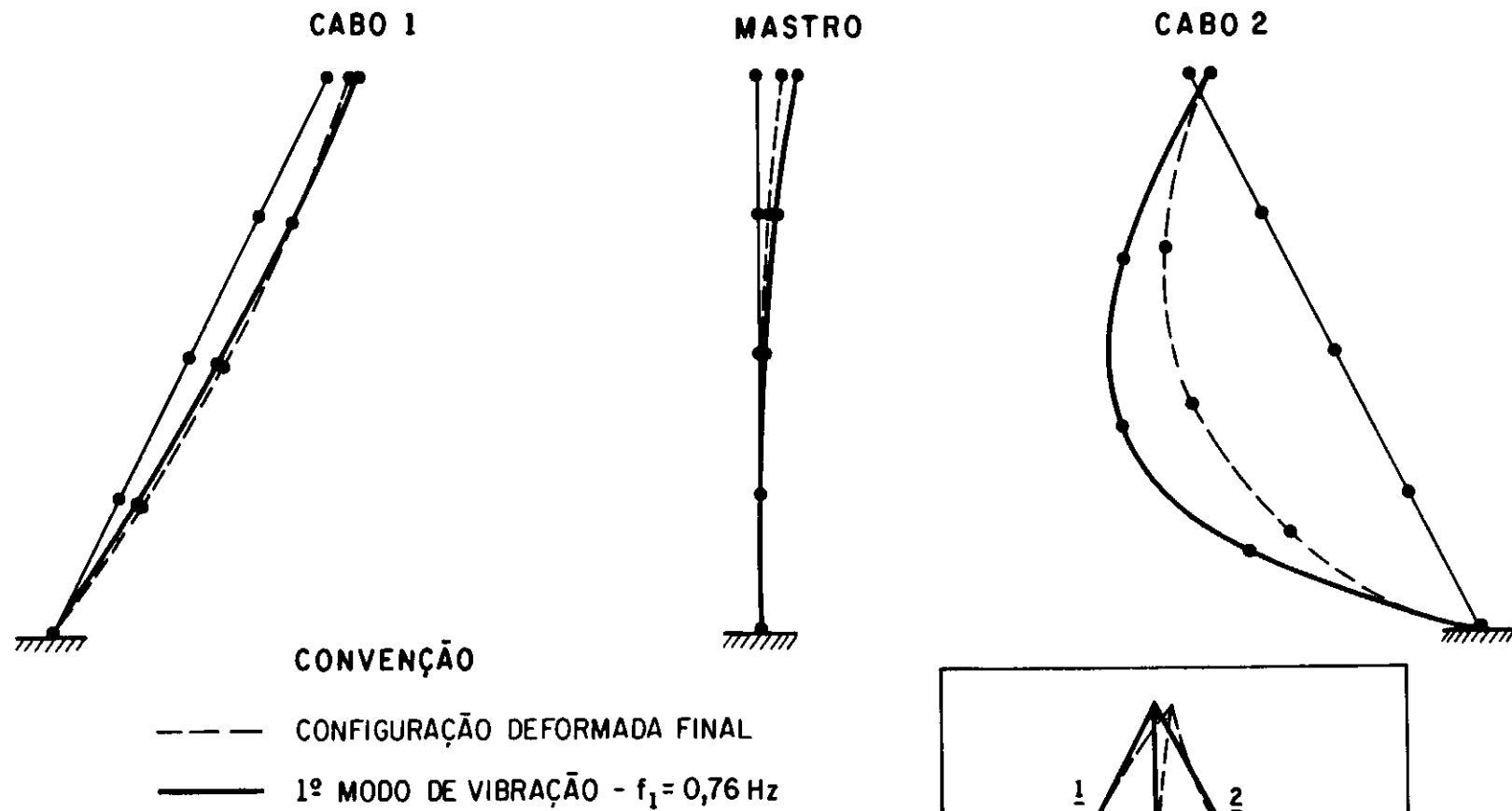
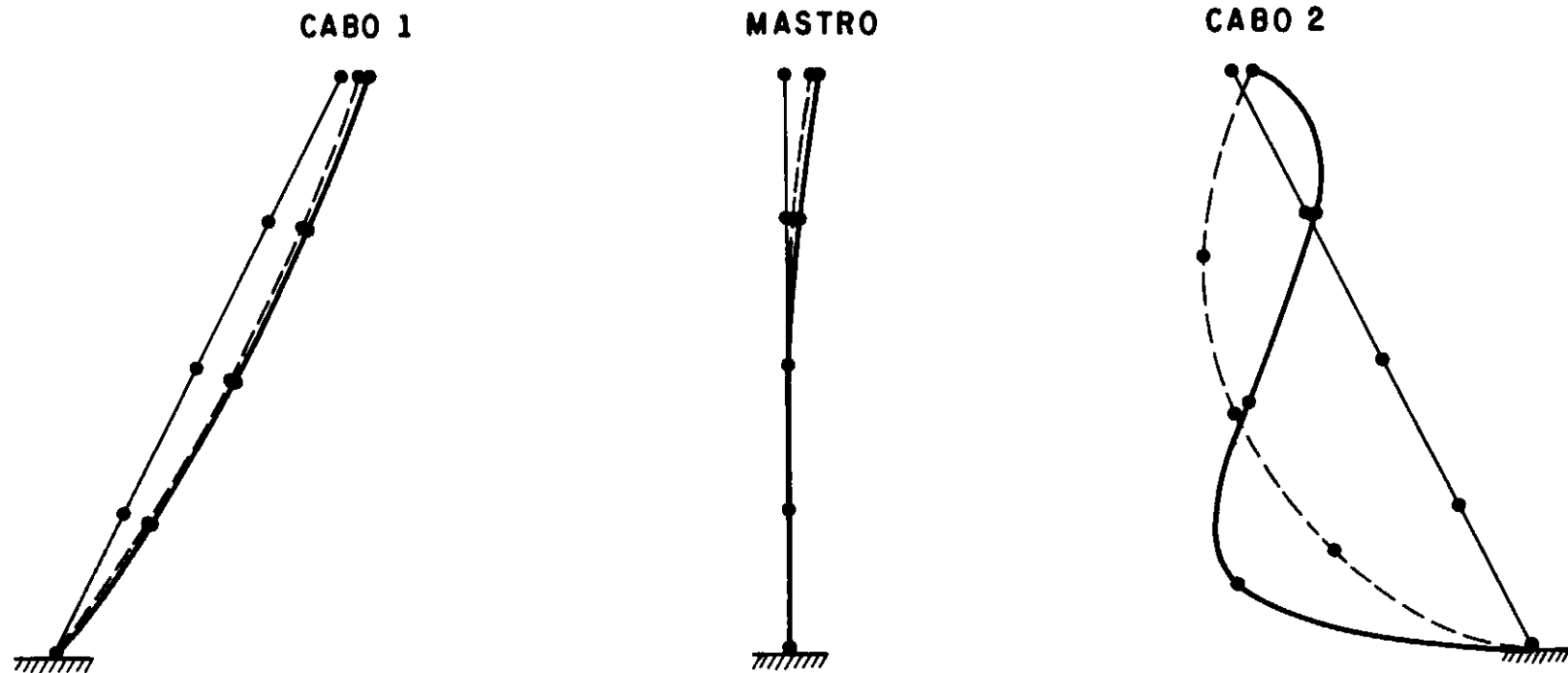


FIG. V. 10a - MODO DE VIBRAÇÃO DO MASTRO E CABOS
DA FIG. V. 9.



CONVENÇÃO

- — — CONFIGURAÇÃO DEFORMADA FINAL
- 2º MODO DE VIBRAÇÃO - $f_2 = 0,90$ Hz

FIG. V.10b - MODO DE VIBRAÇÃO DO MASTRO E CABOS DA FIG. V.9.

V.2.4.2 - TORRE ESTAIADA COM 1 CABO

Para a torre com um único cabo, procede-se a análise com a geometria inicial sem o cabo 2, com o cabo 1 protendido, e com a carga transversal P crescendo desde 0 até 222,30 kN. É evidente que este não é um procedimento automático mas, em termos práticos, para análise do comportamento estrutural não faria muita diferença a adoção deste ou daquele procedimento de "reinício", comentado anteriormente na seção V.2.4.1, se o interesse está voltado para o resultado final.

A resposta, carga versus deslocamento no topo da torre, para a carga $P = 222,30$ kN é mostrada na figura V.11. O deslocamento δ_H final encontrado é igual a 52,21 cm, o qual, em relação ao valor $\delta_H = 52,6$ cm obtido por SCHEREFLEER para a torre com 2 cabos, representa uma diferença de menos de 1%. Observa-se, assim, que o cabo 2 perde realmente sua função estrutural, não contribuindo para a resistência da torre à carga transversal aplicada.

Ainda em relação à figura V.11, percebe-se que a resposta carga versus deslocamento é praticamente linear para a torre com 1 cabo, demonstrando assim que a não-linearidade, observada na figura V.9 para a torre com 2 cabos, deve-se mesmo ao cabo 2 que tende a afrouxar.

Para a torre estaiada por um único cabo, o pequeno deslocamento, δ_H , no sentido contrário ao eixo dos "X" (fig. V.11) é resultante do efeito da protensão inicial no cabo 1. Além disso, a análise foi iniciada para a estrutura numa configuração inicial desequilibrada.

OBS.: PARA CARACTERÍSTICA
VIDE FIG. V.

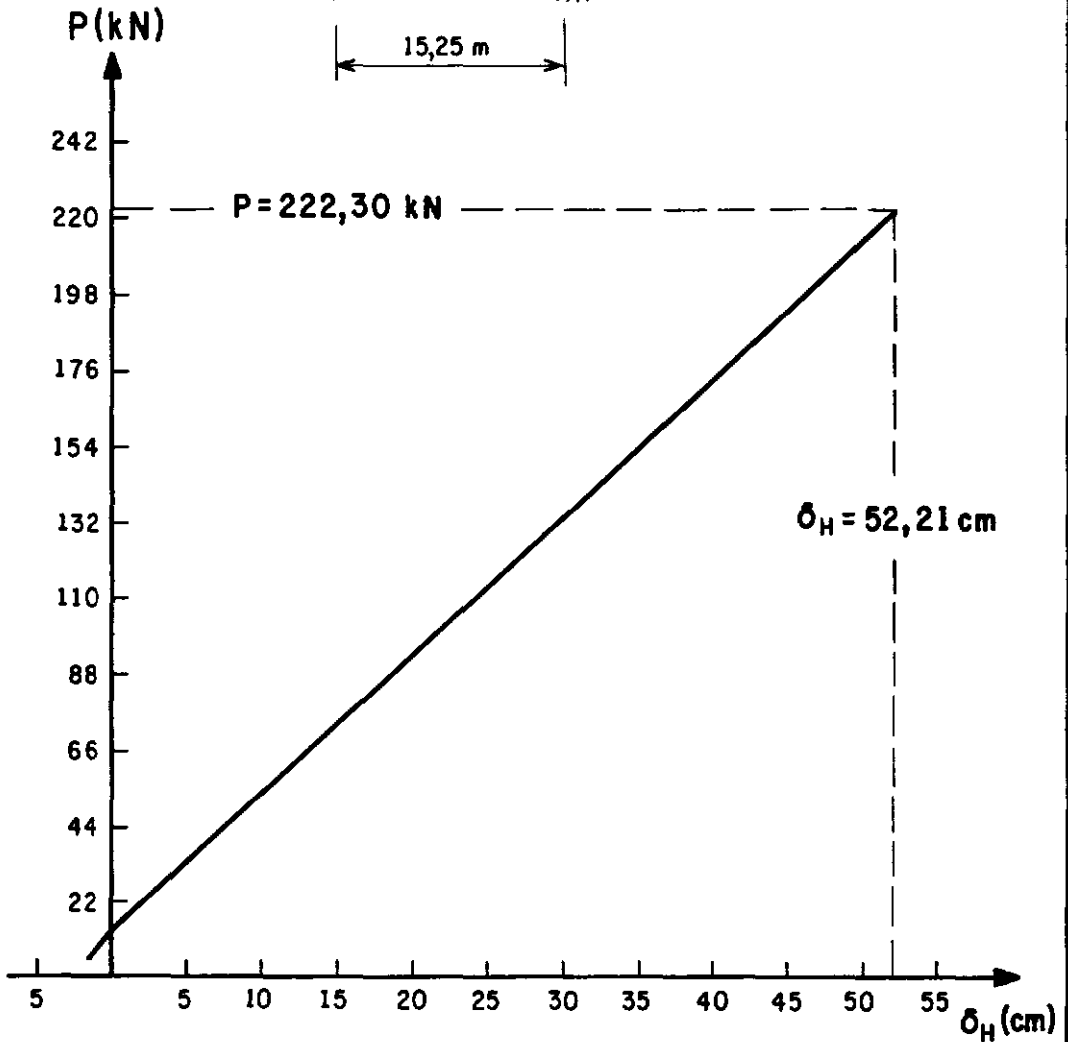
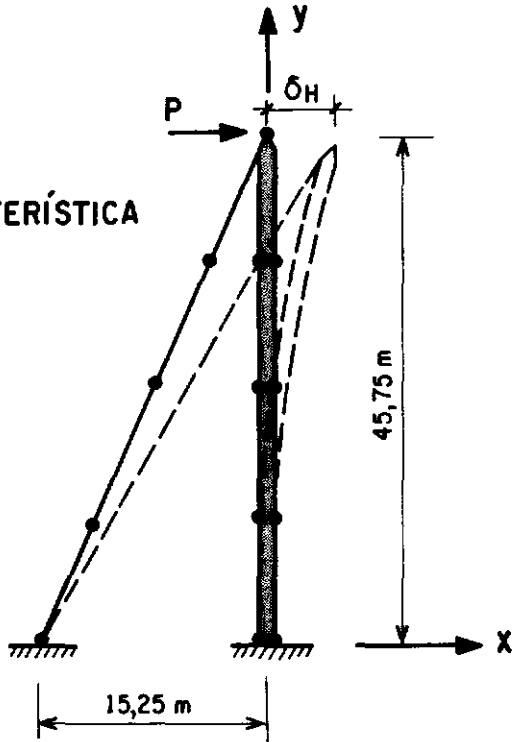


FIG. V.11 - RESPOSTA NÃO-LINEAR DE MASTRO ESTAIADO
COM CABO ÚNICO.

Vibrações Sob Tensões Iniciais

A tabela V.6 apresenta os valores das frequências naturais para o mastro estaiado com 2 ou 1 cabo, vibrando em torno da configuração deformada final.

Tabela V.6 - Frequências naturais do mastro estaiado.

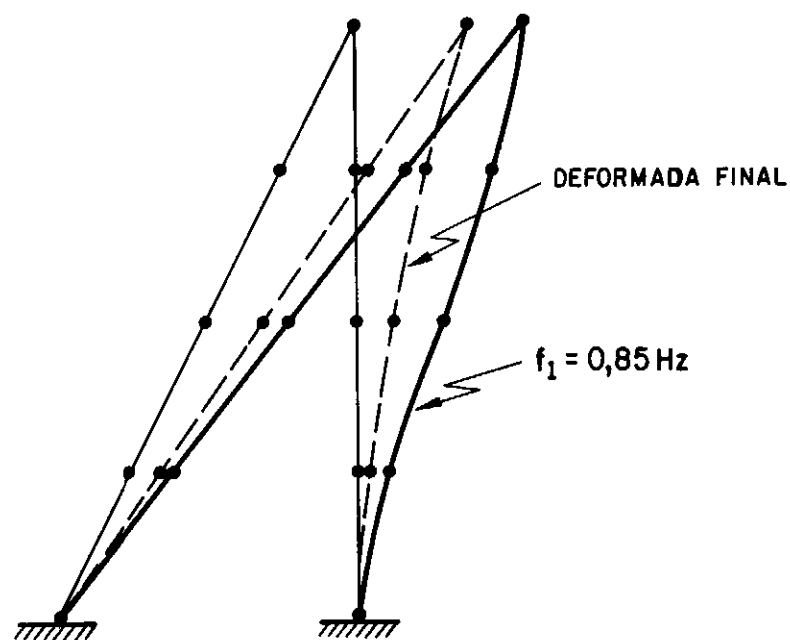
MASTRO ESTAIADO	FREQUÊNCIAS NATURAIS (Hz)	
	f_1	f_2
Com 2 cabos	0,76	0,90
Com 1 cabo	0,85	1,89

Nota-se que há um aumento nos valores das frequências quando se passa do mastro com 2 cabos para o de 1 cabo. É evidente que este aumento é devido ao sistema com 1 cabo ser mais rígido. Resta, portanto, atribuir ao cabo 2, no sistema com 2 cabos, a responsabilidade pela queda nos valores das frequências.

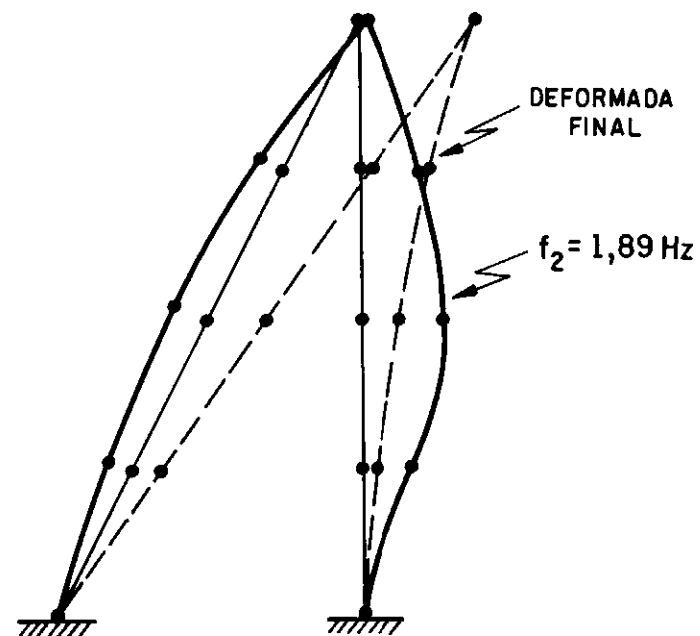
A figura V.12 mostra os 1º. e 2º. modos de vibração com os respectivos valores das frequências naturais, para a estrutura numa configuração final de equilíbrio.

Comentários Finais Sobre o Comportamento Estrutural

É importante observar que embora o deslocamento final seja pequeno, no caso do mastro estaiado com 2 dois cabos e $P = 30 \text{ kN}$, o grau de não-linearidade é mais acentuado do que



1º MODO DE VIBRAÇÃO



2º MODO DE VIBRAÇÃO

FIG. V.12 - MODOS DE VIBRAÇÃO DO MASTRO ESTAIADO COM CABO ÚNICO DA FIG. V.11.

para o mastro estaiado com um cabo, cujo deslocamento final é cerca de 12 vezes maior que aquele obtido para o primeiro (mastro estaiado com 2 cabos) e carga externa $P = 222.30 \text{ kN}$ (veja figs. V.9 e V.11).

Este fato caracteriza bem a influência da não-linearidade no cabo quando o mesmo tende a ficar frouxo. Conclui-se, assim, que o comportamento global do sistema é influenciado diretamente pela não-linearidade do cabo que afrouxa.

V.3 - PONTE ESTAIADA: ANÁLISE BI-DIMENSIONAL

A ponte estaiada metálica mostrada na figura V.13 constitui um exemplo de aplicação prática deste trabalho. Trata-se de uma ponte com vão principal de 400 ft (122 m) e vãos secundários de 100 ft (30,5 m). A altura da torre é de 80 ft (24,4 m). As forças iniciais nos cabos são iguais, respectivamente, a: $F_1 = 9680 \text{ Kips}$ ($4,31 \times 10^7 \text{ N}$) e $F_2 = 11500 \text{ kips}$ ($5,12 \times 10^7 \text{ N}$). O peso próprio atuante sobre o tabuleiro é igual a 16 Kips/ft ($2,34 \times 10^5 \text{ N/m}$). O tabuleiro e a torre foram discretizadas com elemento de pórtico espacial (fazendo-se três graus de liberdade inativos). Para discretização dos cabos, usou-se um único elemento de cabo/treliça. Para as bielas 1 e 2, discretizadas com um elemento de treliça, adotou-se $E = 0.40 \times 10^7 \text{ Kips/ft}^2$ ($1,92 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$) e $A = 10 \text{ ft}^2$ ($0,09 \text{ m}^2$). As propriedades do material, características geométricas e carregamento, juntamente com os pontos nodais de discretização, são mostrados na figura V.13. A ligação torre/tabuleiro é considerada rígida.

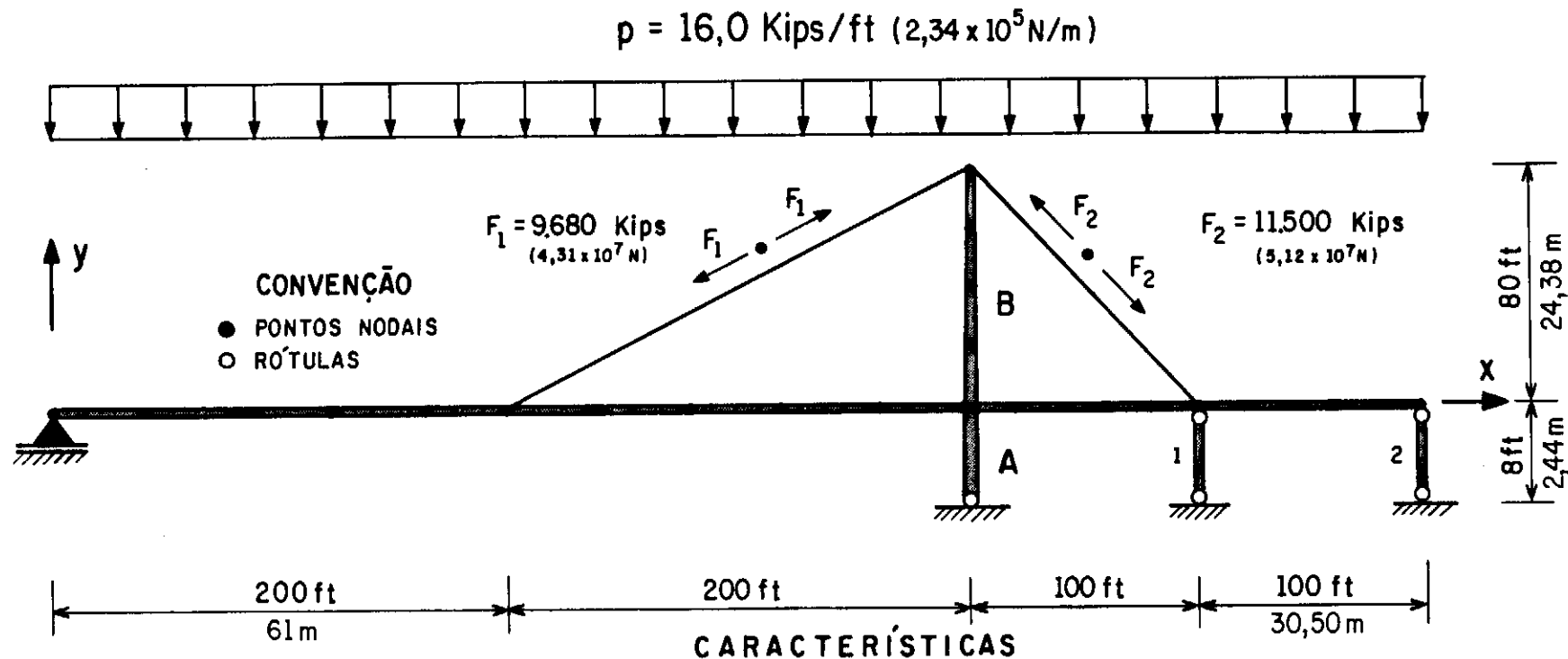


FIG. V.13 - PONTE ESTAIADA METÁLICA: GEOMETRIA, CARREGAMENTO E DISCRETIZAÇÃO.

Respostas Estáticas Não-lineares

A resposta não-linear estática, carga distribuída versus deslocamento vertical δ_v , no meio do vão principal, é mostrada na figura V.14. Percebe-se que essa resposta é praticamente linear, indicando uma pequena perda de rigidez.

O valor máximo encontrado para o deslocamento vertical no meio do vão principal, usando-se o algoritmo 2, foi $\delta_v = 0,46$ ft (0,14 m). A deformada final do tabuleiro e da torre é indicada em pontilhado nesta mesma figura.

A resposta não-linear, carga distribuída versus deslocamento horizontal do topo da torre, é ilustrada na figura V.15. Observa-se, mais uma vez, que a resposta é praticamente linear indicando uma pequena perda de rigidez.

As configurações estáticas deformadas, resultantes da análise "linear" e não-linear são indicadas na figura V.16. A análise "linear" foi efetuada da mesma maneira descrita anteriormente em relação ao exemplo da seção V.2.2. Através dessas figuras, verifica-se que não ocorrem diferenças significativas entre os resultados obtidos pelas duas análises. É claro porém que se somente a matriz K_E tivesse sido usada para a análise linear clássica, essa diferença seria um pouco mais ampliada. Pelos gráficos obtidos da análise não-linear (figs. V.14 e V.15) era de se esperar que não ocorressem grandes diferenças entre as duas análises.

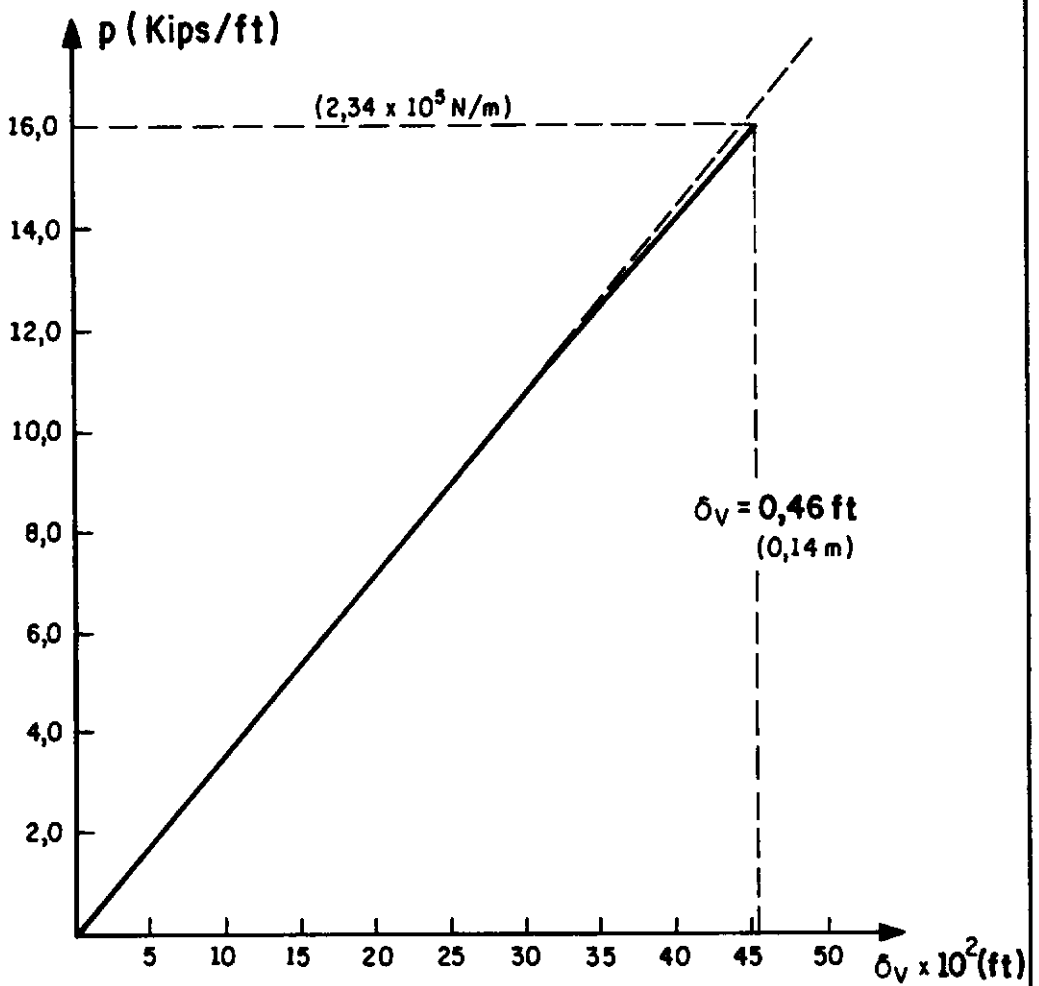
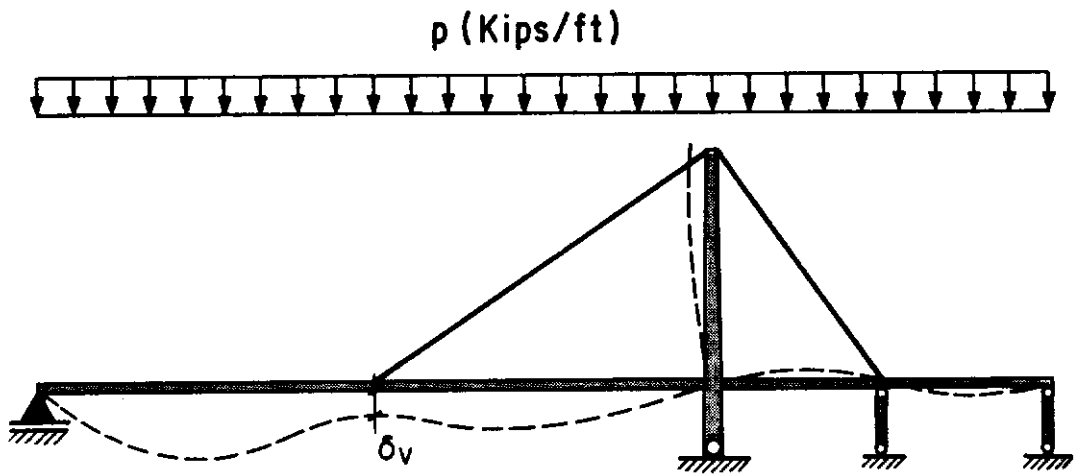


FIG. V.14 - RESPOSTA NÃO-LINEAR DA PONTE ESTAIADA
CARGA x FLECHA DO TABULEIRO.

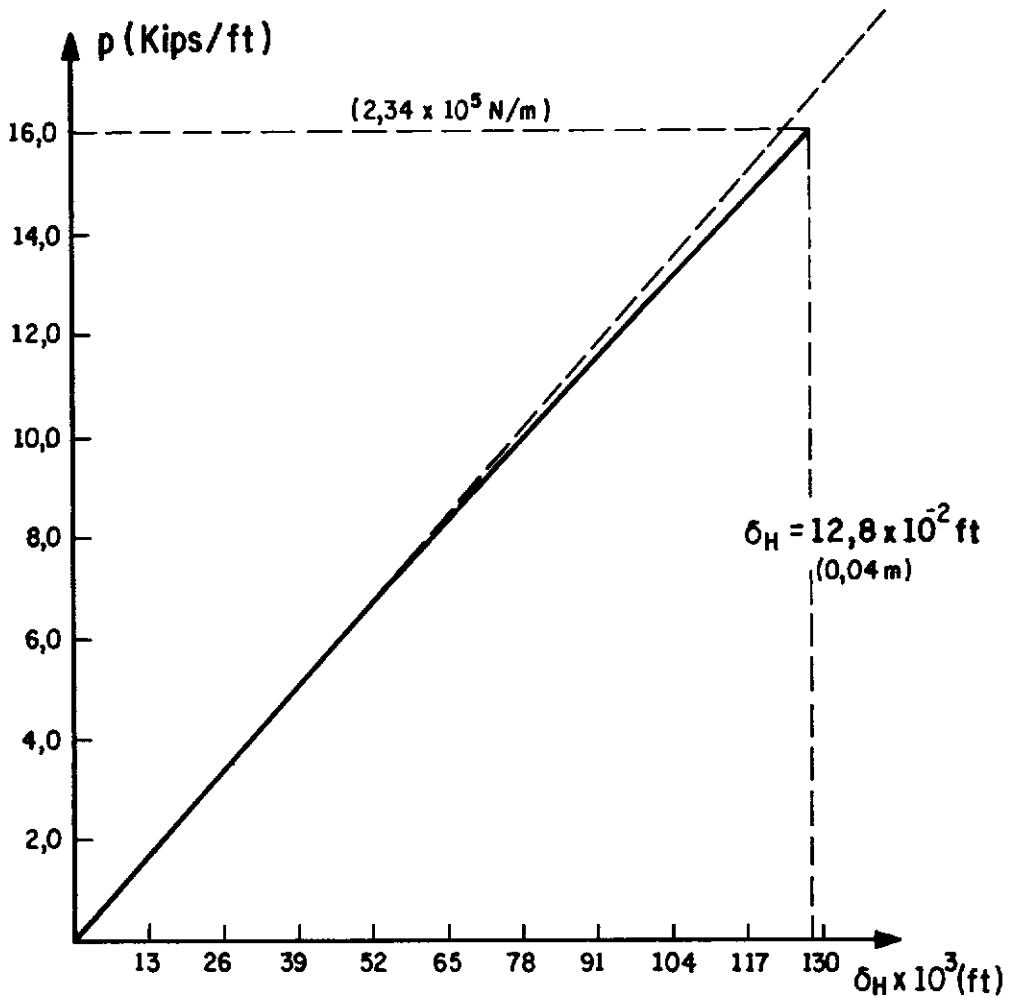
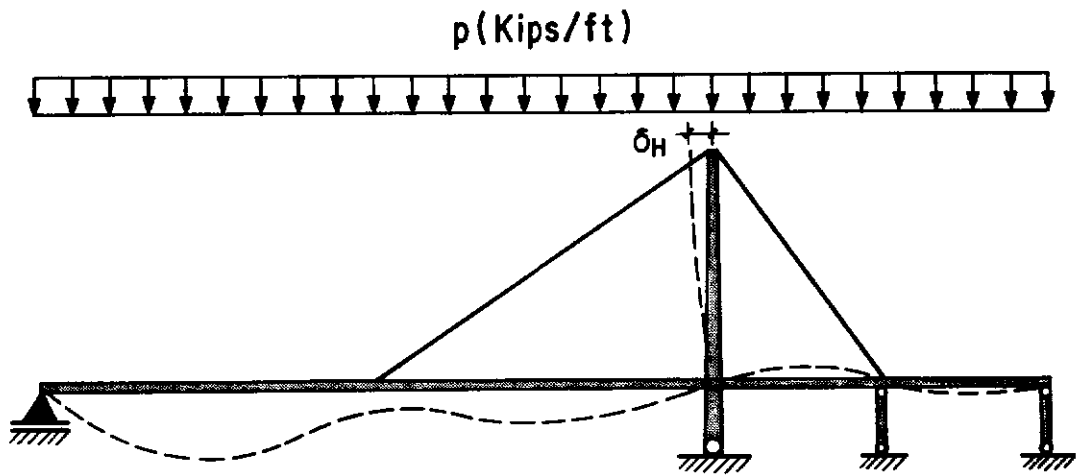
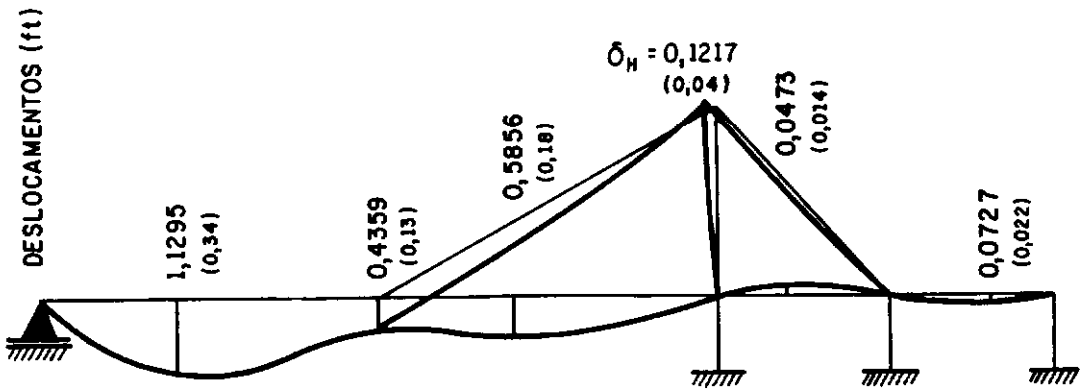
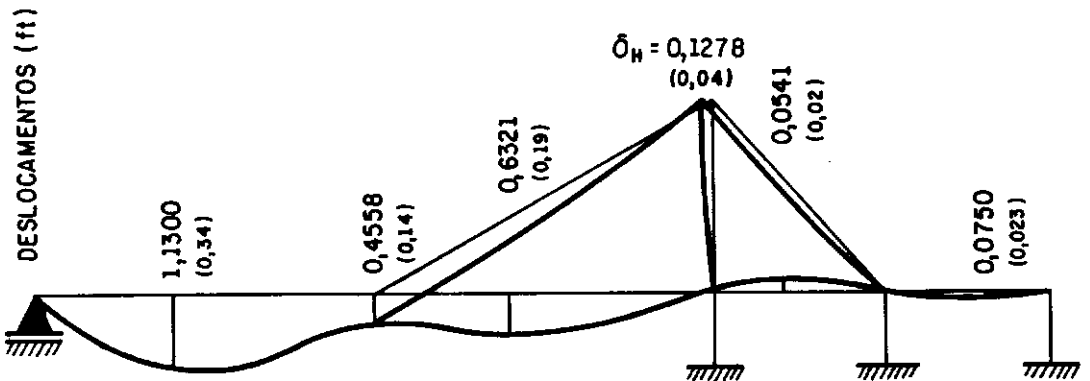


FIG. V.15 - RESPOSTA NÃO-LINEAR DA PONTE ESTAIADA
CARGA x DESLOCAMENTO DO TOPO DA TORRE.



ANÁLISE "LINEAR"

NOTA: VALORES ENTRE PARÊNTESES EM METROS



ANÁLISE NÃO-LINEAR

FIG. V.16 - CONFIGURAÇÕES ESTÁTICAS DEFORMADAS DA PONTE ESTAIADA.

Vibrações Sob Tensões Iniciais

A figura V.17 mostra as formas e frequências dos 1º. e 2º. modos de vibração em torno da configuração final de equilíbrio estático.

Na figura V.18 encontra-se o diagrama dos esforços normais e a força final nos cabos. Nota-se um pequeno aumento no valor da força nos cabos quando comparado com a força inicial. A parte do tabuleiro compreendida entre as extremidades dos cabos está toda comprimida. Esta compressão é devida à componente horizontal da força no cabo atuando sobre o tabuleiro. Em pontes, cuja viga do tabuleiro é protendida, esta força de compressão pode ser usada como força de protensão. Os esforços normais para os vãos extremos da viga são nulos devido à liberação do deslocamento horizontal permitido pelos apoios.

A tabela V.6 apresenta uma comparação entre os valores dos esforços normais, aqui obtidos e outros apresentados nas referências indicadas, para os trechos definidos pelas letras de E a F na figura V.18.

Observa-se que todos os resultados se comparam bastante bem.

Os diagramas de esforços cortantes e momentos fletores encontram-se, respectivamente, nas figuras V.19 e V.20.

A tabela V.7 apresenta os valores dos deslocamentos e momentos para os pontos de 1 a 8 indicados na figura V.20.

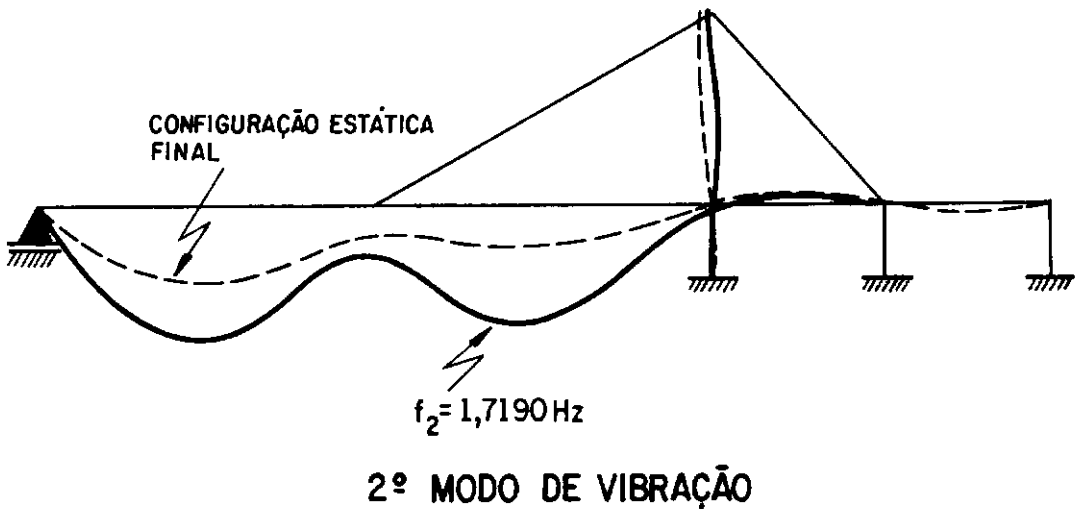
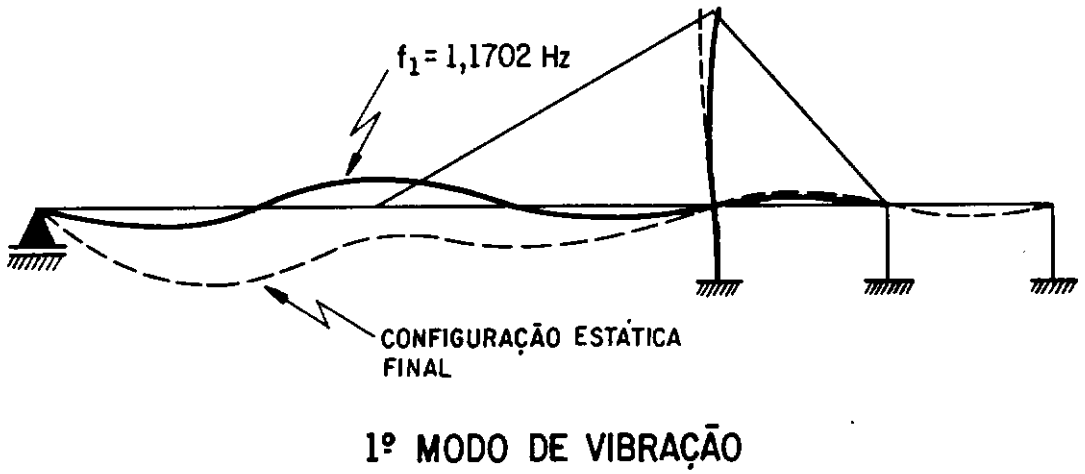
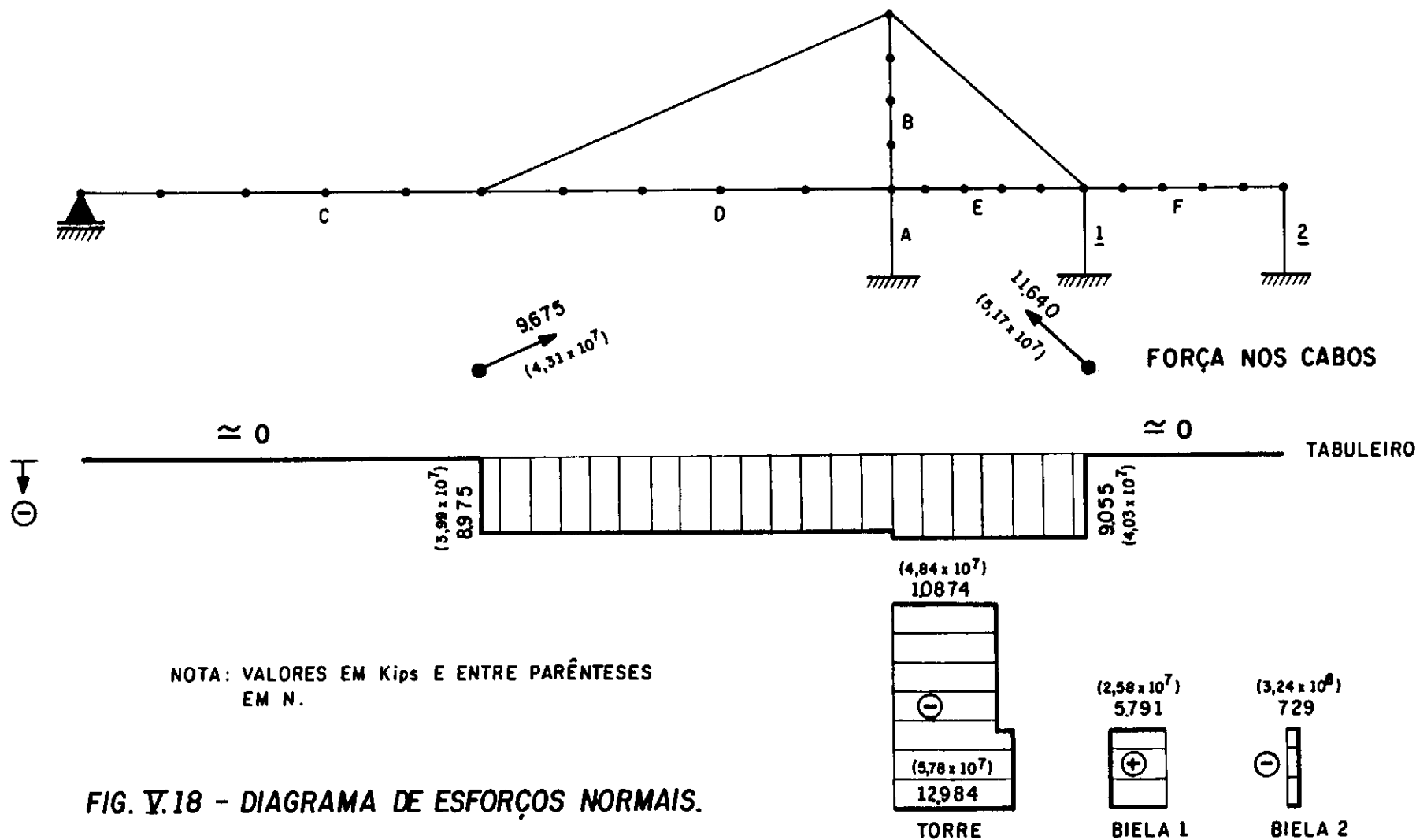
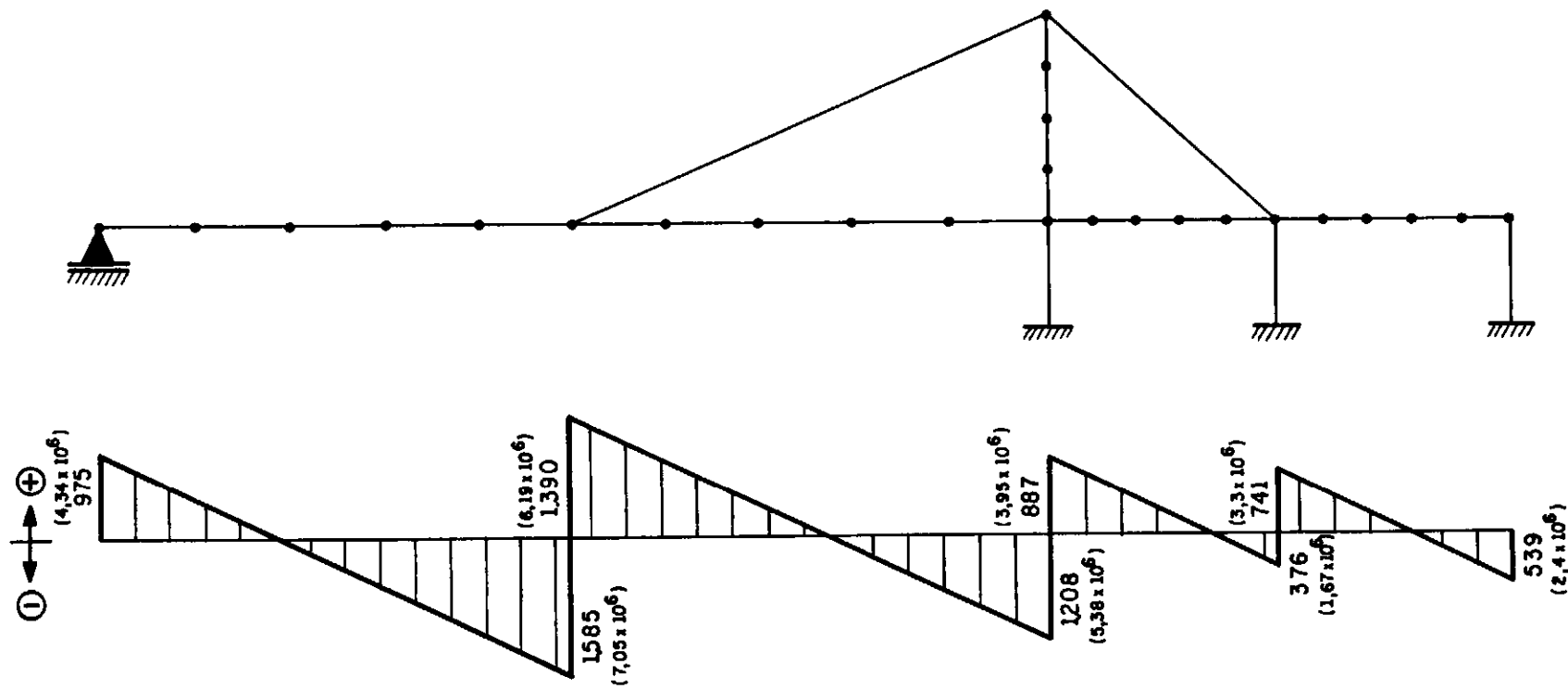


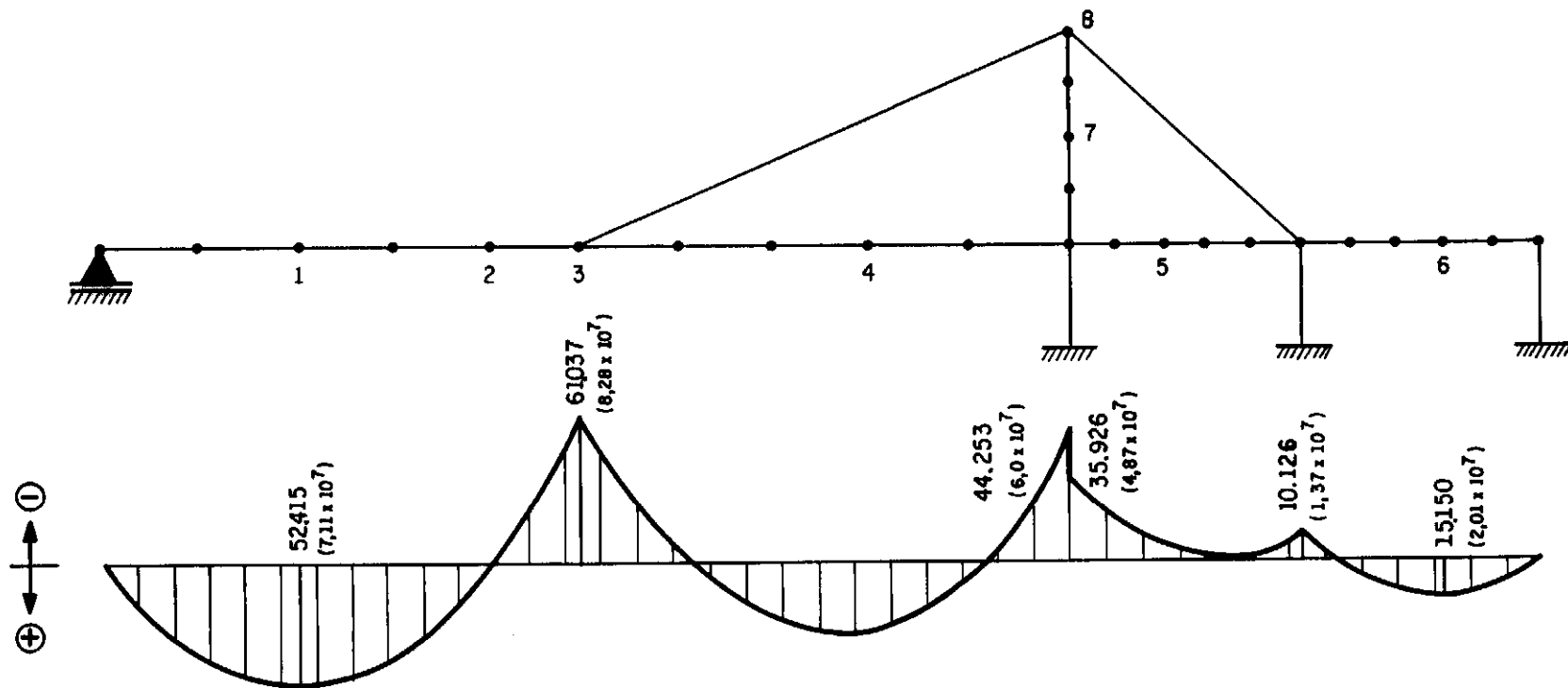
FIG. V.17 - MODOS DE VIBRAÇÃO DA PONTE ESTAIADA COM CARREGAMENTO TOTAL.





NOTA: VALORES EM Kips E ENTRE PARÊNTESES EM N.

FIG. V.19 - DIAGRAMA DE ESFORÇOS CORTANTES.



NOTA: VALORES EM Kips x ft E ENTRE
PARÊNTESES EM N x m.

FIG. V.20 - DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES.

Tabela V.6 - Esforços normais para a ponte estaiada (trechos de E-F na figura V.18)

TRABALHOS	ESFORÇOS NORMAIS em kips (MN)					
	Trecho A	Trecho B	Trecho C	Trecho D	Trecho E	Trecho F
Presente	-12948 (-58,0)	-10874 (-48,0)	$\approx 0.$	-8975 (-40,0)	-9055 (-40,0)	$\approx 0.$
Ref. [44]	-13350 (-59,0)	-10800 (-48,0)	$\approx 0.$	-8916 (-40,0)	-8992 (-40,0)	$\approx 0.$
Ref. [45]	-13350 (-59,0)	-10800 (-48,0)	0.	-9000 (-40,0)	-9000 (-40,0)	0.

Para cada nó indicado na tabela V.7, os valores da 1^a. linha se referem à presente análise; os da segunda e da terceira linhas dizem respeito, respectivamente, aos trabalhos de PFEIL [44] e TANG [45].

Os deslocamentos de 1 a 6, pertencentes à viga, são na direção vertical e os de 7 a 8, pertencentes à torre, na direção horizontal (veja tabela V.7)

Observa-se uma boa comparação entre os resultados aqui obtidos e os da referência [44] tanto para momentos quanto para deslocamentos.

Deve-se ressaltar que TANG na sua análise assumiu valores para a tensão nos cabos e esforços axiais na viga e na torre, acarretando os hiperestáticos finais no tabuleiro.

Tabela V.7 - Deslocamentos e momentos fletores para a ponte estaiada (pontos de 1-8 na figura V.20).

(*) valores não fornecidos para estes pontos na referência [45].

NÓ	DESLOCAMENTO em ft (m)	MOMENTO FLETOR em Kips.ft (N.m)
1	-1,13 (0,34) -1,08 (0,33) -1,17 (0,36)	52415 (7,1E+7) 50200 (6,8E+7) 32800 (4,4E+7)
2	-0,78 (0,24) -0,73 (0,22) -1,35 (0,41)	2301 (3,1E+6) 2069 (2,8E+6) 14400 (1,9E+7)
3	-0,46 (0,14) -0,43 (0,13) (*)	-61037 (8,3E+7) -60290 (8,2E+7) (*)
4	-0,57 (0,17) -0,57 (0,17) (*)	29404 (4,0E+7) 29460 (4,0E+7) (*)
5	0,054 (0,016) 0,054 (0,016) 0,074 (0,022)	-6922 (9,4E+6) -6794 (9,2E+6) -11700 (1,5E+7)
6	0,075 (0,023) 0,075 (0,023) (*)	15150 (2,1E+7) 15120 (2,1E+7) (*)
7	-0,1270 (0,04) -0,1250 (0,04) -0,1800 (0,05)	4742 (6,4E+6) 4742 (6,4E+6) 2940 (4,0E+6)
8	-0,1278 (0,04) -0,1238 (0,04) -0,2650 (0,08)	0. 0. (*)

V.4 - PONTE ESTAIADA: ANÁLISE TRIDIMENSIONAL

Como exemplo de aplicação final, apresenta-se um modelo de ponte estaiada tridimensional de grande comprimento.

A ponte é constituída de 3 vãos, medindo os vãos extremos 960 ft (293m) e o vão principal, 2200 ft (671m). As características geométricas e propriedades do material, para os elementos pertencentes à torre e ao tabuleiro, encontram-se nas tabelas V.1 e V.1a. A tabela V.2 apresenta as características geométricas e propriedades para os elementos de cabo, cuja numeração se refere àquela que é ilustrada na figura V.21, em planta. As condições de contorno são aquelas mostradas na figura V.21, em elevação. O material da viga e ligações é o aço; o da torre é concreto armado.

As ligações torre/tabuleiro são feitas através de elementos de ligação. Na figura V.22 ilustra-se esse tipo de ligação. Encontra-se também na figura V.22 todas as dimensões necessárias para definição da geometria da torre.

O tabuleiro foi discretizado através de elementos de pórtico espacial, utilizando-se duas longarinas e 27 transversinas. As torres também foram discretizadas com elementos de pórtico espacial. Cada cabo foi discretizado por 4 elementos de cabo/treliça. A discretização adotada resultou em 242 nós e 325 elementos, gerando um sistema de 1452 equações, que representa um sistema bem maior do que os anteriores.

Os resultados das forças nos cabos, mostrados na tabela V.3, foram obtidos para o carregamento devido ao peso

Tabela V.1 - Características e propriedades dos elementos do tabuleiro e da torre.

		$A - ft^2$ (m^2)	$I - ft^4$ x (m^4)	$I - ft^4$ y (m^4)	$I - ft^4$ z (m^4)
Viga Principal (vão central)		7,50 (0,70) 9,0 (0,84)	12,0 (0,10)	12500 (107,9)	75,0 (0,65) 375,0 (3,24)
Viga Transversal (para a torre)		1,50 (0,14) 3,0 (0,28)	1,50 (0,01) 10,0 (0,09)	600,0 (5,18)	6,00 (0,05)
Torre	acima do nível do tabuleiro	140,0 (13,0)	4000 (34,5)	10000 (86,3)	5000 (43,2)
	abaixo do nível do tabuleiro	200,0 (18,52)	15000 (129)	25000 (216)	25000 (216)
Reforço da Torre	Vigas superiores	70,0 (6,50)	150 (1,29)	900 (7,77)	150 (1,29)
	viga abaixo tabuleiro	80,0 (7,43)	200 (1,73)	1000 (8,63)	200 (1,73)
Ligação Torre/ Tabuleiro	ligação horizontal	3,0 (0,28)	0,001	0,001	0,001
	ligação vertical	3,0 (0,28)	0,001	6,00 (0,05)	6,00 (0,05)

Tabela V.1a - Características e propriedades dos elementos para tabuleiro e torre.

		E-Ksf (MN/m ²)	G-Ksf (MN/m ²)	Peso Próprio Kips/ft (MN/m)
Viga Principal		4176000 (2E+5)	1670400 (8E+4)	7,25 (0,11)
Viga Transversal		4176000 (2E+5)	1670400 (8E+4)	1,50 (0,02)
Torre	acima do nível do tabuleiro	580400 (2,8E+4)	232160 (1E+4)	21,00 (0,31)
	abaixo do nível do tabuleiro	580400 (2,8E+4)	232160 (1E+4)	30,00 (0,44)
Reforço da Torre	Vigas superiores	580400 (2,8E+4)	232160 (1E+4)	10,50 (0,15)
	viga abaixo tabuleiro	580400 (2,8E+4)	232160 (1E+4)	12,00 (0,18)
Ligação Torre/ Tabuleiro	ligação horizontal	4176000 (2E+5)	1670400 (8E+4)	1,50 (0,02)
	ligação vertical	4176000 (2E+5)	1670400 (8E+4)	1,50 (0,02)

Tabela V.2 - Características e propriedades dos cabos.

Cabo Número	Área - ft ² (m ²)	Força Inicial - Kips - (N)	Peso Próprio - Kips/ft - (N/m)	E - Ksf (N/m ²)
1, 24, 25 48, 11, 14 35, 38	0,430 (0,04)	4300 (1,91E+7)	0,3010 (4,39E+3)	4,176E+6 (2,0E+11)
26, 47, 2 23, 10, 15 34, 39	0,270 (0,025)	2700 (1,20E+7)	0,1890 (2,76E+3)	" "
27, 46, 3 22, 9, 16 40, 33	0,245 (0,023)	2450 (1,1E+7)	0,1715 (2,5E+3)	" "
28, 45, 4 21, 8, 17 32, 41	0,210 (0,02)	2100 (9,35E+6)	0,1470 (2,15E+3)	" "
29, 44, 5 20, 7, 18 31, 42	0,174 (0,016)	1740 (7,74E+6)	0,1218 (1,78E+3)	" "
30, 43, 6 19	0,133 (0,012)	1330 (5,92E+6)	0,0931 (1,36E+3)	" "
12, 13, 36 37	0,455 (0,042)	4550 (2,0E+7)	0,3185 (4,65E+3)	" "

Tabela V.3 - Força nos cabos em Kips e entre parênteses em MegaNewton (MN).

Cabos Número	Força no elem. super. cabo/ torre	Força no elem. infer. cabo/ tabul.	Média da força elem. interm	Média da força elem. extrem.	Força inicial
12,13	4988 (22,2)	4902 (21,8)	4406 (19,6)	4945 (22,0)	4550 (20,2)
11,14	4067 (18,1)	4019 (17,9)	3687 (16,4)	4043 (18,0)	4300 (19,1)
10,15	2536 (11,3)	2494 (11,1)	2371 (10,6)	2515 (11,2)	2700 (12,0)
9,16	2295 (10,2)	2252 (10,0)	2129 (9,47)	2274 (10,1)	2450 (10,9)
8,17	1847 (8,22)	1812 (8,06)	1801 (8,01)	1830 (8,14)	2100 (9,35)
7,18	1437 (6,39)	1410 (6,27)	1418 (6,31)	1423 (6,33)	1740 (7,74)
6,19	1313 (5,84)	1293 (5,75)	1299 (5,78)	1303 (5,80)	1330 (5,92)
5,20	1770 (7,88)	1742 (7,75)	1733 (7,71)	1756 (7,81)	1740 (7,74)
4,21	2205 (9,81)	2169 (9,65)	2130 (9,48)	2187 (9,73)	2100 (9,35)
3,22	2728 (12,1)	2676 (11,9)	2579 (11,5)	2702 (12,0)	2450 (10,9)
2,23	3238 (14,4)	3164 (14,1)	2991 (13,3)	3201 (14,2)	2700 (12,0)
1,24	5607 (25,0)	5445 (24,2)	5039 (22,4)	5526 (24,6)	4300 (19,1)

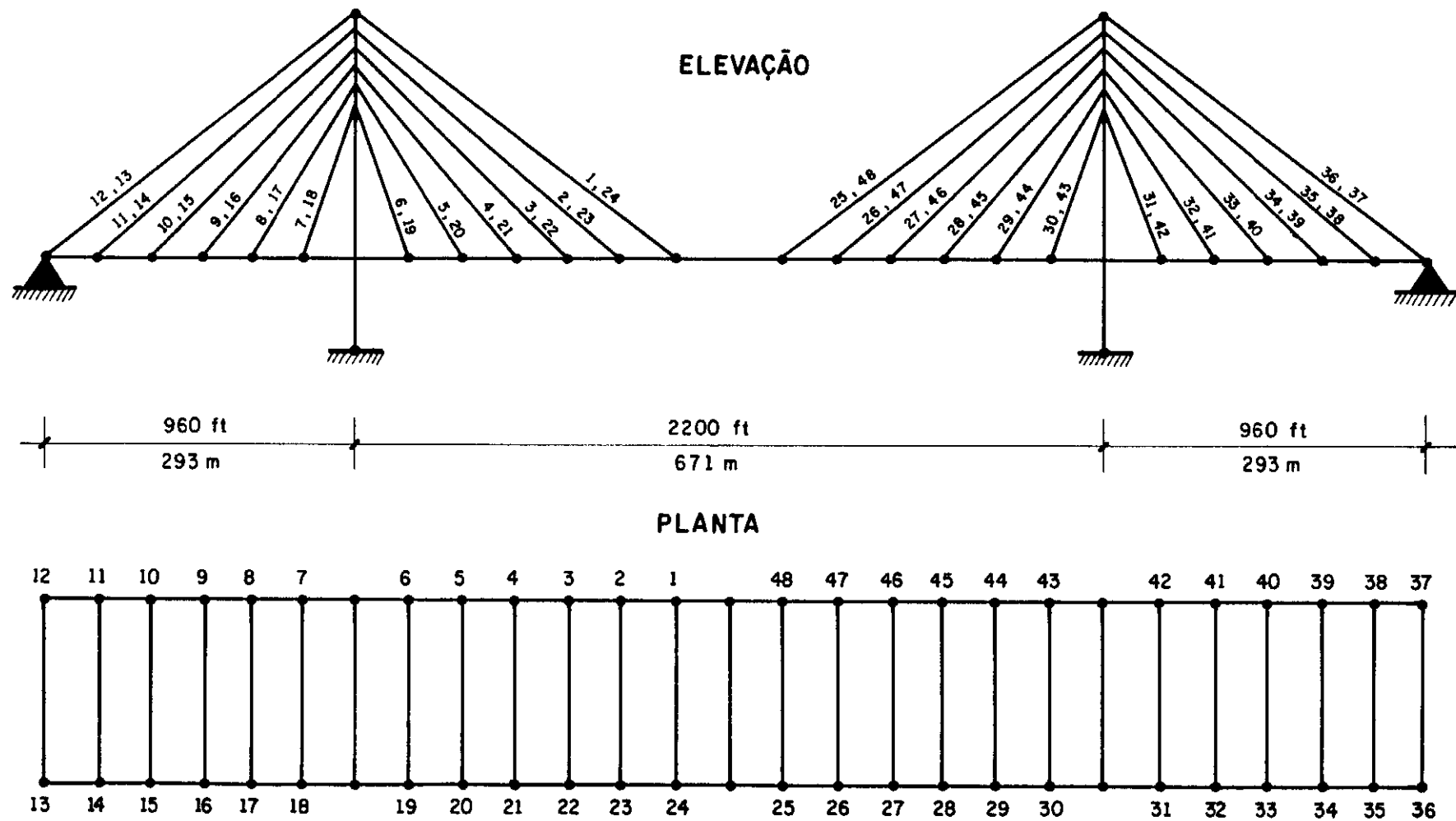
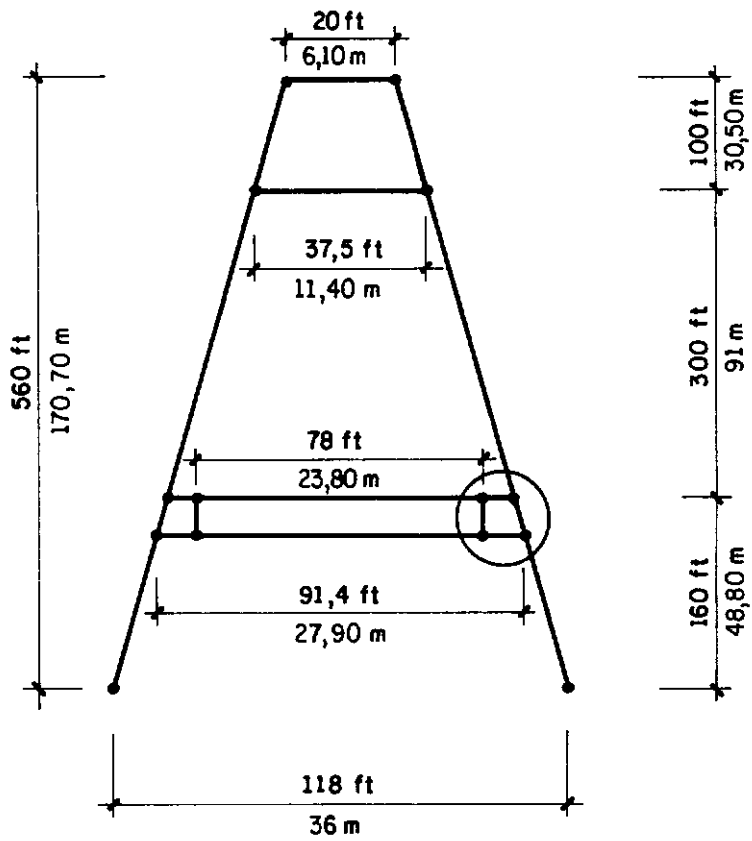
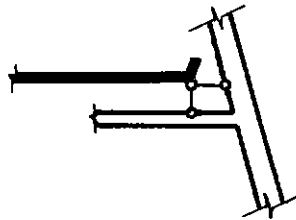


FIG. V.21 - MODELO DA PONTE ESTAIADA TRIDIMENSIONAL: ELEVAÇÃO e PLANTA.



GEOMETRIA



DETALHE

FIG. V.22 - GEOMETRIA DA TORRE E DETALHE DA LIGAÇÃO TABULEIRO / TORRE.

próprio da estrutura, aplicando-o como carga pontual nos pontos de discretização da estrutura. Aqueles valores são resultantes da análise estática. Pela tabela V.3 percebe-se que os valores das forças, para os cabos que partem da torre em direção aos vãos externos, diminuem em relação aos valores das protensões, com exceção dos cabos mais externos (cabos 12,13,36,37 - fig. V.21). Por outro lado, os cabos que partem da torre em direção ao vão central apresentam um acréscimo de tensões em relação à protensão aplicada nos mesmos, com exceção dos cabos mais internos (6,19,30,43), para os quais ocorre o contrário.

Na tabela V.4 apreentam-se os deslocamentos da torre, para aqueles pontos definidos pela conexão cabo/torre, a fim de se ter uma idéia da deformada. Percebe-se que os deslocamentos, embora muito pequenos e próximos, aumentam de cima para baixo, ocorrendo no sentido dos vãos extremos. O deslocamento máximo do tabuleiro ocorre no meio do vão central, como era de se esperar, sendo igual a 1.48 ft(45 cm). Este valor mostra que para a ponte sob carregamento de peso próprio o resultado de uma análise não-linear não diferirá muito do valor obtido.

Os dados da estrutura apresentados neste exemplo foram retirados da referência [36].

Tabela V.4 - Deslocamentos da torre em ft e entre parênteses em c.m.

Pontos de ancoragem dos cabos na torre	0,066 (2,01)
	0,070 (2,13)
	0,073 (2,23)
	0,076 (2,32)
	0,077 (2,35)
	0,077 (2,35)

Na figura V.23 apresenta-se a deformada obtida para o modelo tridimensional da ponta estaiada quando a mesma está submetida ao seu peso próprio. Embora os deslocamentos sejam pequenos para este carregamento, nota-se a forma defletida assumida para aqueles cabos mais longos.

A análise dinâmica não foi efetuada por falta de dados suficientes na referência supracitada que pudesse servir de valores para comparação; ressaltando-se, ainda, que naquela referência são apresentados resultados apenas para a análise estática.

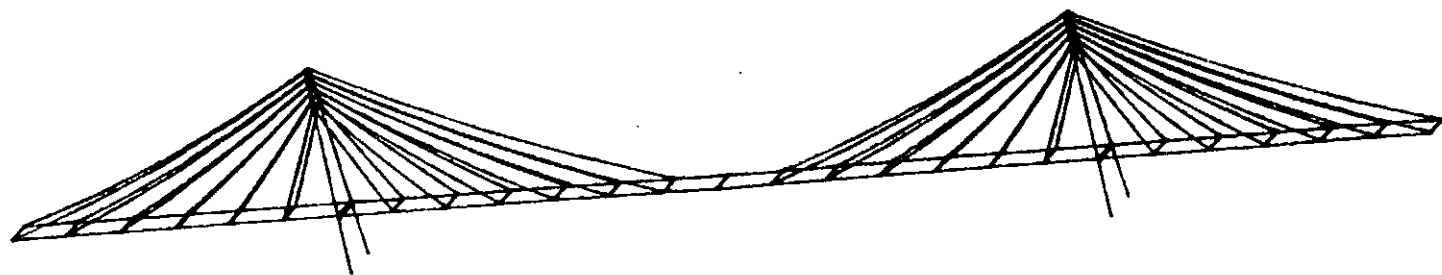


FIG. V.23 - DEFORMADA OBTIDA PARA O MODELO
TRIDIMENSIONAL DE PONTE ESTAIADA

CAPÍTULO VI

COMENTÁRIOS FINAIS, CONCLUSÕES E SUGESTÕES

VI.1 - COMENTÁRIOS FINAIS

Ao longo deste trabalho pretendeu-se deixar claro a formulação apresentada e a sua validade em termos de aplicação prática. Vários exemplos foram testados objetivando a transparência tanto das falhas quanto do potencial dessa formulação. Muitos assuntos que aparecem no texto, principalmente os que antecedem a apresentação da formulação matricial, são conhecidos; mas, são de propósito enfatizados para esclarecer passo a passo, ao longo do seu desenvolvimento, os parâmetros e variáveis envolvidas nas equações que irão nortear todo o trabalho dali por diante.

Os exemplos de aplicação, escolhidos com aumento gradual de complexidade, permitem que se faça os seguintes comentários gerais; muitos dos quais já ali apresentados:

a) estruturas estaiadas são estruturas que requisitam a consideração da mudança de geometria que ocorre para o carregamento aplicado. A configuração geométrica deformada pode ser bastante diferente daquela indeformada; salientando-se, contudo, que essa diferença é uma função do número de cabos presentes na estrutura. Portanto, tem-se que os cabos influenciam de maneira significativa a resposta estrutural.

b) verifica-se, através da análise de resultados, que a

não-linearidade desses sistemas estruturais é ditado, na maioria dos casos, pela não-linearidade dos cabos. Nos casos em que o carregamento estático promove tração adicional em todos os cabos-estais e onde a configuração deformada final não difere significativamente da inicial, o comportamento global da estrutura apresenta não-linearidade de fraca a moderada. Em casos contrários, onde alguns cabos são afrouxados, a não-linearidade geométrica é mais acentuada.

c) a aproximação adotada na modelagem dos estais, por elementos retilíneos de cabo/treliça, tem suas vantagens e desvantagens.

As principais vantagens são sua simplicidade e efetividade de modelagem, quando o carregamento externo atua no sentido de manter os cabos-estais sempre tracionados. Verifica-se, com os resultados obtidos, um ótimo desempenho dessa modelagem, não tendo sido detectado nenhum problema. Se contudo, o carregamento externo tende a afrouxar alguns dos cabos-estais, essa modelagem aproximada apresenta problemas e mostra aí sua principal desvantagem.

Em termos do comportamento do cabo representado por elemento de treliça, um afrouxamento pode chegar a corresponder à ocorrência de esforço axial de compressão num desses elementos de treliça, gerando mecanismo hipoestático nesse "cabo". Computacionalmente, isto implica em instabilidade numérica no algoritmo de solução não-linear. A torre estaiada com 2 cabos serve para demonstrar esse tipo de problema. Por outro lado, é importante se frisar que para estruturas de pontes estaiadas, ou para outras com vários estais, encontradas na prática, os carregamentos externos

dificilmente induzirão esforços de compressão nesse modelo de cabo/treliça.

d) os resultados obtidos, em termos de características dinâmicas para o sistema, mostram que existe realmente uma influência da tensão inicial nos valores dinâmicos, sendo essa influência tanto mais acentuada quanto maior for a flexibilidade do sistema. Deve-se destacar também, a diferença em termos de comportamento estrutural para os elementos componentes desse sistema. No caso dos elementos de pórtico, verifica-se que existe um decréscimo nos valores das frequências naturais, enquanto que nos elementos de cabo, verifica-se o contrário. Esta característica de ganho de rigidez do componente estrutural, cabo, é um fator positivo e importante no comportamento global da estrutura. Da presença dos cabos nesses sistemas espera-se, em geral, uma estrutura aerodinamicamente mais estável, devido ao aumento de rigidez proporcionado pelos mesmos. Isto é exemplificado pela comparação entre os comportamentos de pontes estaiadas e pontes suspensas.

VI.2 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O exemplo da ponte estaiada tridimensional, envolvendo um número bem maior de equações do que os anteriores, demonstra também que a modelagem desenvolvida se adequa completamente a esses sistemas e que para propósitos práticos não existe a necessidade da consideração de elementos mais refinados para discretizar os cabos.

Em suma, pode-se dizer que os resultados demonstram a

validade da formulação apresentada e o bom desempenho, em todos os casos analisados, da modelagem adotada.

Para continuidade deste trabalho pode-se sugerir:

- a) otimizar o sistema computacional para torná-lo mais eficiente em termos de tempo de máquina. Em virtude do aumento de tempo, em análises não-lineares para estruturas de grande porte, poder-se-ia inclusive utilizar um acelerador de convergência;
- b) estudo paramétrico de pontes estaiadas para observar a influência de vários parâmetros sobre o comportamento estático não-linear e sobre as características dinâmicas, conduzindo a resultados que possam direcionar o projetista na prática;
- c) utilização de pré e pós processadores gráficos que permitem facilidades na análise dos dados e resultados;
- d) desenvolvimento do trabalho voltado para o projeto de pontes estaiadas, contando com o intercâmbio técnico com algumas instituições tradicionais nessa área;
- e) desenvolvimento de modelos experimentais em laboratório para aferição da ferrameta numérica através da correlação de resultados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] PODOLNY JR,W; SCALZI,J.B. - "Construction and Design of Cable-Stayed Bridges", John Wiley & Sons, Inc., New York,1976.
- [2] EKHANDI S.G; MADUGULA, M.K.S. - "Geometric Nonlinear Analysis of Three-Dimensional Guyed Towers", Computers & Structures, Vol. 29, N^o. 5, pp. 801-806, 1988.
- [3] VENÂNCIO FILHO, F. - "Análise Matricial de Estruturas", Almeida Neves Editores, Ltda., 1975.
- [4] BENJAMIN, A.C. - "Análise Não-Linear Geométrica de Pórticos Tridimensionais pelo Método dos Elementos Finitos", Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1982.
- [5] DYM, C.L; SHAMES, I.H. - "Solid Mechanic: A Variational Approach", Mc.Graw-Hill,1973.
- [6] COOK, R.D. - "Concepts and Aplications of Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [7] PRZEMIENIECKI, J.S. - "Theory of Matrix Structural Analysis", Dover Publications, Inc., New York, 1985.

- [8] PEREIRA, H.L.C. - "Análise de Estabilidade Elástica pelo Método dos Elementos Finitos", Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1973.
- [9] RUBINSTEIN, M.F. - "Structural Systems - Statics, Dynamics and Stability", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1970.
- [10] CLOUGH, R.W; PENZIEN, J. - "Dinamics of Structures", Mc.Graw-Hill, 1982.
- [11] BATHE, K.J. - "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice Hall, Inc., Englowood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [12] MARQUES, O.A. - "Solução de Problemas de Autovalor Generalizados através do Método de Iteração por Subespaços em blocos e do Algoritmo de Lanczos com Ortogonalização Seletiva", Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1986.
- [13] FERRANTE, A.J. - "Método dos Elementos Finitos", Notas de Aula, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1987.
- [14] BATISTA, R.C. - "Notas de Aula do Curso Dinâmica I", PEC - COPPE/UFRJ, 1^o. período, 1990.
- [15] ZIENKIEWICZ, O.C. - "The Finite Element Method", Mc.Graw-Hill, London, 1982.

- [16] BOSSAK, M.A.J; ZIENKIEWICZ, O.C. - "Free Vibration of Initially Stressed Solids, with Particular Reference to Centrifugal-Force effects in Rotating Machinery, Journal of Strain Analysis", Vol. 8, N^o. 4, pp. 245-252, 1973.
- [17] WOOD, R.D; ZIENKIEWICZ, O.C. - "Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells", Computers & Structures, Vol. 7, pp. 725-735, 1977.
- [18] DESAI, C.S; ABEL, J.F. - "Introduction to the Finite Element Method: A Numerical Method for Engineering Analysis", Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1972.
- [19] CHAJES, A; CHURCHILL, J.E. - "Nonlinear Frame Analysis by Finite Element Methods", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 113, pp. 1221-1235, June, 1987.
- [20] BATHE, K.J; CIMENTO, A.P. - "Some Pratical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 22, pp. 59-85, 1980.
- [21] STRICKLIN, J.A; HAISLER, W.E. - "Formulations and Solution Procedures for Nonlinear Structural

Analysis", Computers & Structures, Vol. 7, pp. 125-136, 1977.

- [22] BERGAN, P.G; SOREIDE, T. - "A Comparative Study of Different Numerical Solution Techniques as Applied to a Nonlinear Structural Problem", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 2, pp. 185-201, 1973.
- [23] HAISLER, W.E; STRICKLIN, J.A. - "Development and Evaluation of Solution Procedures for Geometrically Nonlinear Structural Analysis", AIAA Journal, Vol. 10, N^o. 3, pp. 264-272, 1971.
- [24] BARON, F; VENKATESAN, M.S. - "Nonlinear Analysis of Cable and Truss Element", Journal of the Structural Division, Vol. 97, N^o. ST2, pp. 679-709, Feb., 1971.
- [25] BERGAN, P.G; CLOUGH, R.W. - "Convergence Criteria for Iterative Process", AIAA Journal, Vol. 10, pp. 1107-1108, 1972.
- [26] RAMAN, N.V; KUMAR, G.V.S; RAO, V.V.S. - "Large Displacement Analysis of Guyed Towers", Computers & Structures, Vol. 28, N^o. 1, pp. 93-104, 1988.
- [27] DESAI, Y.M; POPPLEWELL, N; SHAH, A.H; BURAGOHAIN - "Geometric Nonlinear Static Analysis of Cable Supported Structures", Computers & Structures, Vol.

29, N^o. 6, pp. 1001-1009, 1988.

- [28] AZEVEDO, A.V; SORIANO, H.L. - "Uma Eficiente Implementação do Método de Iteração por Subespaço", LENEC, Lisboa, 1982.
- [29] MAGLUTA, C. - "Análise Dinâmica de Estrutura Flexível em Meio Fluido", Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.
- [30] SORIANO, H.L. - "Análise de Estruturas Reticuladas em Computadores de Pequeno Porte", Escola de Engenharia da UFRJ, Rio de Janeiro, 1986.
- [31] LIVESLEY, R.K. - "Matrix Methods of Structural Analysis", 2nd edition, Pergamon Press, New York, 1975.
- [32] ERNST, H.J. - "Der E-Modul Von Seilen Unter Berücksichtigung Des Durchhanges", Der Bauingenieur, Vol. 40, N^o. 2, pp. 52-55, Feb., 1965.
- [33] FLEMING, J.F. - "Nonlinear Static Analysis of Cable-Stayed Bridge Structures", Computers & Structures, Vol. 10, pp. 621-635, 1979.
- [34] LAZAR, B.E. - "Stiffness Analysis of Cable-Stayed Bridges", Journal of the Structural Division, Vol. 98, N^o. ST7, July, 1972.

- [35] TANG, M.C. - "Design of Cable-Stayed Girder Bridges",
Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 98,
Nº. ST8, pp. 1789-1802, August, 1972.

- [36] NAZMY, A.S; ABDEL-GHAFFAR, A.M. - "Three-Dimensional
Nonlinear Static Analysis of Cable-Stayed Bridges",
Computers & Structures, Vol. 34, Nº. 2, pp. 257-271,
1990.

- [37] PIPPARD, A.J.S. - "Studies in Elastic Structures",
Edward Arnold & Co., London, 1952.

- [38] CONNOR, J.J; LOGCHER, R.D; CHAN, S.C. - "Nonlinear
Analysis of Elastic Framed Structures", Journal of
the Structural Division, ASCE, Vol. 94, Nº. ST6,
June, 1968.

- [39] MANTILLA, E.P. - "Um Método Iterativo para Análise da
não-linearidade geométrica em estruturas
reticulares", Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de
Janeiro, 1974.

- [40] DONG, S.B; WOLF, F.A. - "Stability Analysis of
Structural by a Reduced System of Generalized
Coordinates", Int. Journal Solids Structures, Vol.
6, 1970.

- [41] OZDEMIR, H. - "A Finite Element Approach for Cable
Problems", Int. Journal Solids Structures, Vol. 15,

pp. 427-437, 1979.

- [42] SCHREFLER, B.A; ODORIZZ, S; WOOD, R.D. - "A Total Lagrangian Geometrically Nonlinear Analysis of Combined Beam and Cable Structures", Computers & Structures, Vol. 17, N^o. 1, pp. 115-127, 1983.

- [43] CHU, K.H; MA, D.C.C. - "Nonlinear Cable and Frame Interaction", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 102, N^o. ST3, March, 1976.

- [44] PFEIL, M.S. - "MEDIFEM - Um Sistema para Análise Estrutural Não-Linear Estático e Dinâmico em Micro-Computador", Seminário de Doutorado, PEC - COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1990.

- [45] TANG, M.C. - "Analysis of Cable-Stayed Girder Bridges", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 97, N^o. ST5, pp. 1481-1495, May, 1971.

Onde:

E = módulo de elasticidade longitudinal.

A = área da seção transversal.

L = comprimento do elemento.

I_x = momento de inércia à torção.

I_y e I_z = momentos de inércia em relação aos eixos y e z , respectivamente.

G = módulo de elasticidade transversal.

MATRIZ GEOMÉTRICA

$$\tilde{K}_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a & \dots & \dots & \dots & c & \dots & e & \dots & \dots & \dots & c \\ \dots & \dots & a & \dots & d & \dots & \dots & \dots & e & \dots & d & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & b & \dots & \dots & \dots & c & \dots & f & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b & \dots & d & \dots & \dots & \dots & f \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a & \dots & \dots & \dots & d \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a & \dots & c & \dots \\ \dots & \dots & \text{sim.} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b \end{array} \right] \end{matrix}$$

Sendo:

$$a = 6 / 5 \quad PL$$

$$b = 2 / 15 \quad PL$$

$$c = P / 10$$

$$d = - P / 10$$

$$e = - 6 / 5 \quad PL$$

$$f = - PL / 30$$

Onde:

P é a força axial atuante no elemento e

L é o comprimento do elemento.

MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO (ou ROTAÇÃO)

$$\tilde{T}_T = \begin{bmatrix} \tilde{T}_R & \tilde{O} & \tilde{O} & \tilde{O} \\ \tilde{O} & \tilde{T}_R & \tilde{O} & \tilde{O} \\ \tilde{O} & \tilde{O} & \tilde{T}_R & \tilde{O} \\ \tilde{O} & \tilde{O} & \tilde{O} & \tilde{T}_R \end{bmatrix}_{12 \times 12}$$

Onde cada submatriz \tilde{T}_R e \tilde{O} é de ordem 3. A submatriz \tilde{T}_R fornece os co-senos diretores do eixo local do elemento em relação ao eixo global.

APÊNDICE B

MATRIZ ELÁSTICA, GEOMÉTRICA E DE ROTAÇÃO
PARA O ELEMENTO DE TRELIÇA ESPACIAL

MATRIZ ELÁSTICA

$$\tilde{K}_E = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} EA/L & & & & & & -EA/L & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots & & & & & & \ddots \\ & & & & & & EA/L & & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & & \\ & & \text{sim.} & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

SENDO:

E = módulo de elasticidade.

A = área da seção transversal.

L = comprimento do elemento.

MATRIZ GEOMETRICA

$$K_G = \frac{P}{L}$$

$$\begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Onde P é a força axial no elemento e L é o comprimento.

MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO (ou ROTAÇÃO)

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_R & \tilde{O} & \tilde{O} & \tilde{O} \\ \tilde{O} & \tilde{O} & \tilde{O} & \tilde{O} \\ \tilde{O} & \tilde{O} & \tilde{T}_R & \tilde{O} \\ \tilde{O} & \tilde{O} & \tilde{O} & \tilde{O} \end{bmatrix}_{12 \times 12}$$

Onde cada submatriz \tilde{T}_R e \tilde{O} é de ordem 3. A submatriz \tilde{T}_R fornece os co-senos diretores do eixo local do elemento em relação ao eixo global.

Observação: notar que os coeficientes das matrizes do elemento de treliça espacial encontram-se distribuídos em relação à matriz de pórtico espacial.